

Interacción radiación-materia (II)

- Cuando hemos estudiado la atenuación de haces en la materia, hemos visto que los coeficientes de atenuación expresan en unidades macroscópicas las secciones eficaces microscópicas de todos los procesos elementales de interacción de la radiación.
- Distinguiremos en las interacciones radiación-materia las de los siguientes campos de radiación:
 1. Fotones (rayos X y gamma)
 2. Partículas cargadas: electrones e iones

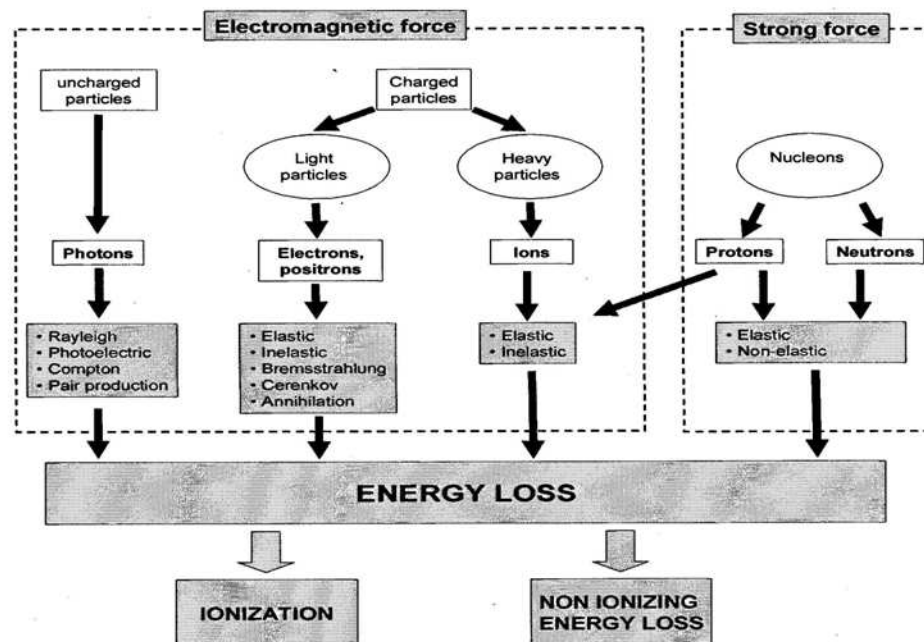
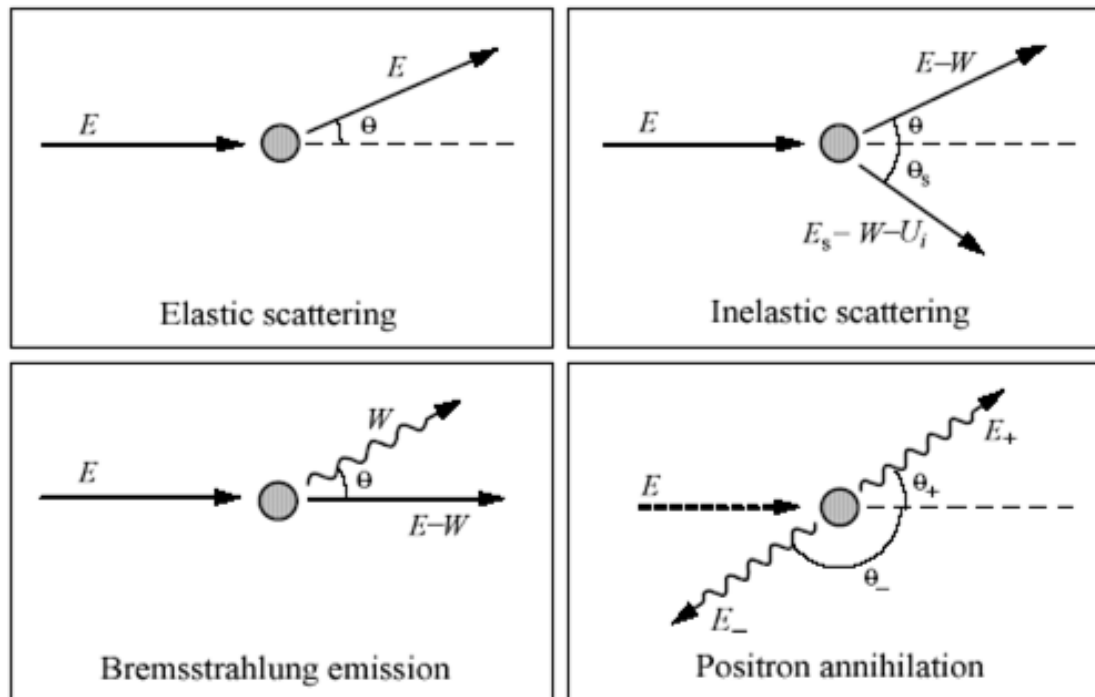


Figure 1: Particles and their main interactions

Interacción radiación-materia

- Las interacciones de las partículas cargadas en el medio material las separaremos en diferentes procesos
 1. Dispersión elástica
 2. Dispersión inelástica
 3. Bremsstrahlung
 4. Aniquilación para positrones (en vuelo o en reposo)



Partículas cargadas: interacciones

El primer aspecto fundamental en las interacciones de las partículas cargadas con el medio material es que, debido a su carga eléctrica, interactúan de modo continuo mediante la fuerza de Coulomb con los electrones y núcleos atómicos del material que atraviesan.

Mientras que la radiación ionizante no cargada, fotones y neutrones pueden atravesar un cierto espesor de material sin sufrir ninguna interacción o sufriendo un número relativamente pequeño de interacciones "catastróficas" con pérdidas importantes de la energía que poseían, las partículas cargadas interactúan sufriendo múltiples colisiones perdiendo, por lo general, una pequeña fracción de su energía en cada una de ellas.

Distancia característica de interacción

| Radiación de partículas cargadas | Radiación neutra |
|--|--------------------------------|
| Iones (partículas cargadas pesadas) 10^{-5} m | Neutrones 10^{-1} m |
| Electrones rápidos 10^{-3} m | Rayos X y gamma 10^{-1} m |

Transporte de electrones

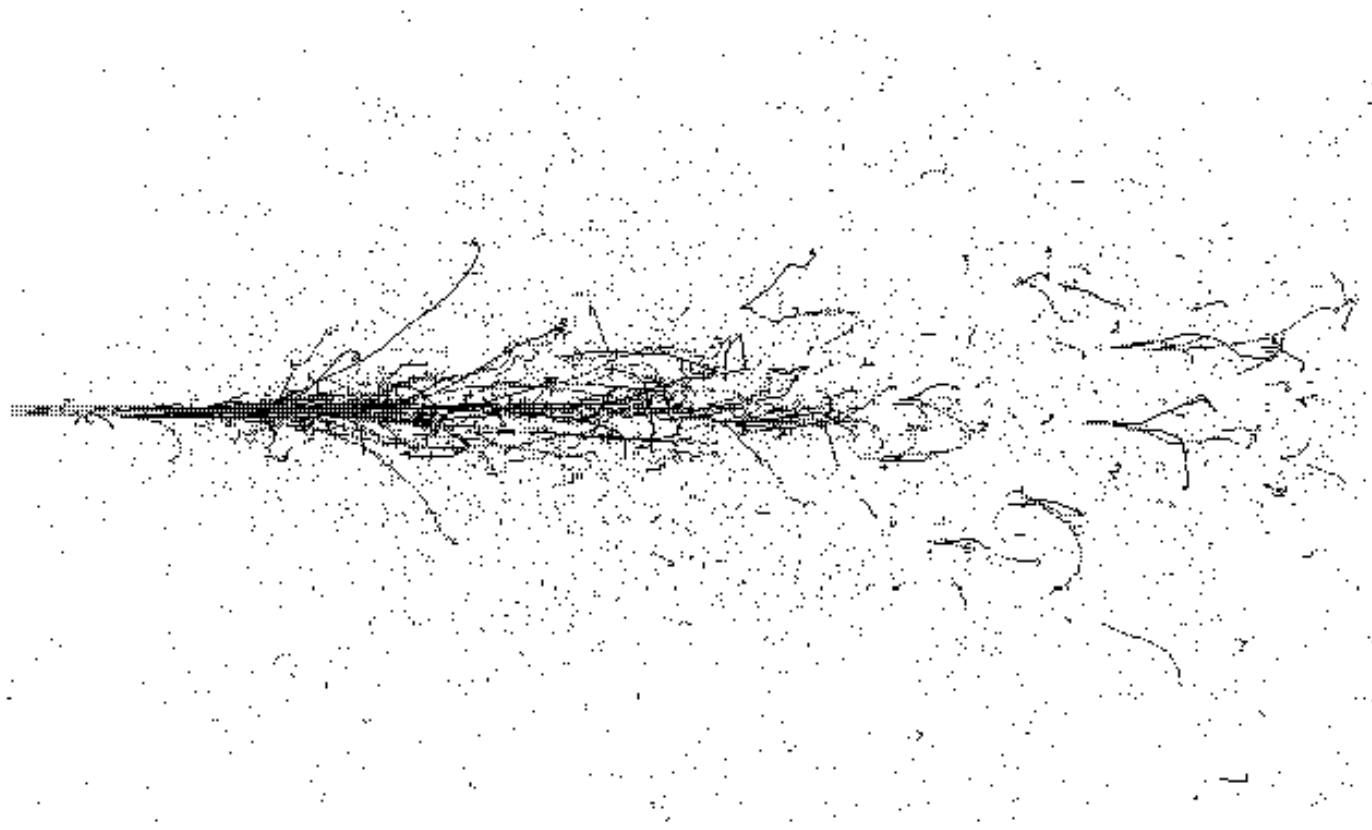
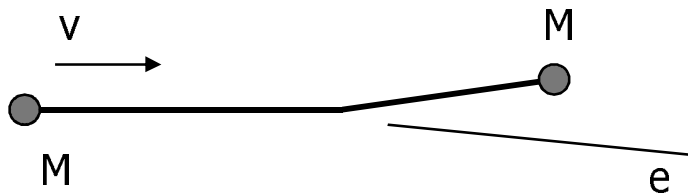


Figure 1.2: A simulation of the cascade resulting from five 1.0 GeV electrons incident from the left on a target. The electrons produce photons which produce electron-positron pairs and so on until the energy of the particles falls below the cascade region. Electron and positron tracks are shown with black lines. Photon tracks are not shown explaining why some electrons and positrons appear to be “disconnected”. This simulation depicted here was produced by the EGS4 code [NHR85, BHNR94] and the system for viewing the trajectories is called EGS_Windows [BW91].

Colisión con electrones

Consideremos una partícula de masa M que sufre una colisión con un electrón en reposo. La máxima energía cinética T que puede adquirir un electrón en una colisión directa es:



$$T_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\left[1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M} \right)^2 \right]}$$

$$\beta = \frac{v}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$E = Mc^2 \gamma$$

Cuando se cumple que $2\gamma m_e/M \ll 1$ entonces se puede aproximar como:

$$T_{\max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

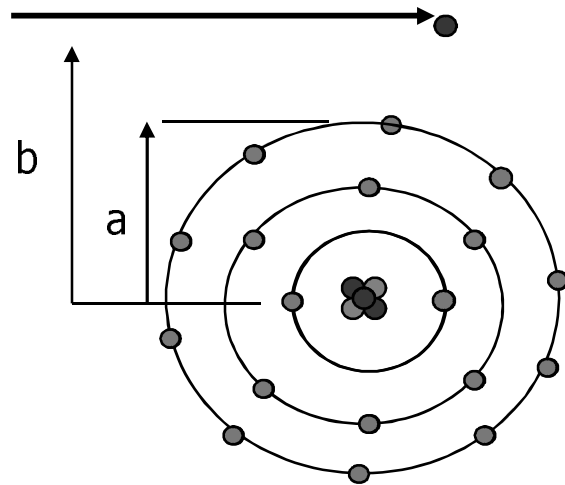
Esta expresión suele ser válida para iones no ultrarrelativistas, y en este caso podemos ver que la máxima energía transferida no depende de M . En el límite no relativista esta expresión se puede escribir como

$$T_{\max} = \frac{4E m_e}{M}$$

Si consideramos una partícula alpha esto significa que pierde sólo (como máximo) 1/2000 de su energía en cada colisión con los electrones del medio. (Para un ión de masa A esta pérdida por colisión es de $1/(500 \cdot A)$)

Colisión coulombiana

Debido a la pequeña fracción perdida en cada interacción coulombiana, un ión que atraviesa el medio material interacciona con multitud de cargas en éste, pudiéndose considerar que el efecto es una pérdida continua de energía hasta su detención (Continuos Slowing Down Approximation o CSDA). Aunque el proceso es realmente más complejo.



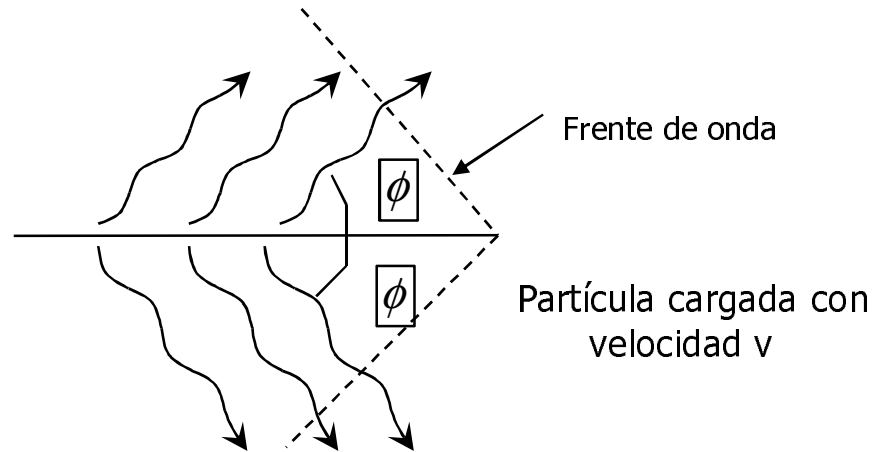
Esencialmente es posible parametrizar el tipo de interacciones con los átomos del medio en función del parámetro de impacto b de la colisión de la partícula cargada respecto al radio atómico a .

Colisiones "soft" $a < b$

En estas colisiones el proyectil pasa a una elevada distancia del átomo y por tanto apenas lo excita, pudiendo llegar a producirse alguna ionización de electrones de valencia en las capas externas. La pérdida de energía es muy pequeña (eV). Se trata de las colisiones más numerosas en el medio y que provocan la mayor parte neta de la pérdida de energía de la partícula cargada (orden 50%).

Efecto Cherenkov

Dentro de las pérdidas "soft" por partículas cargadas, uno de los efectos más llamativos es el llamado efecto Cherenkov que tiene lugar cuando una partícula cargada atraviesa un medio dieléctrico a una velocidad superior a la velocidad de fase de la luz en el medio (velocidad de propagación de la luz en el medio). En este caso los átomos del medio emiten una onda de radiación coherente a un ángulo dado por la relación entre la velocidad de la luz en el medio y la velocidad de la partícula



$$\cos(\phi) = \frac{c}{n v} = \frac{1}{n\beta}$$

El ángulo de Cherenkov varía con la velocidad desde cero (en el umbral) hasta el valor máximo cuando $\beta=1$. La cantidad de fotones emitida por unidad de energía (de los fotones) y de longitud recorrida de la partícula cargada (de carga $z e$) es

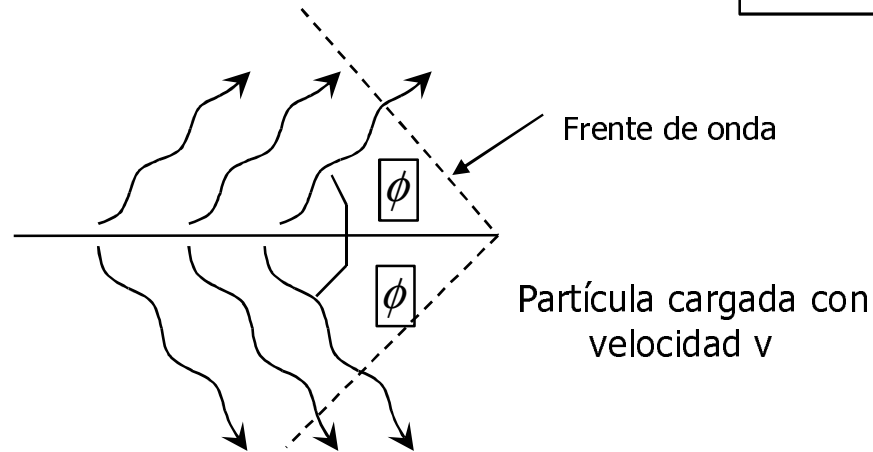
$$\frac{d^2 N}{dE dx} = \frac{\alpha z^2}{\hbar c} \sin^2(\phi) = \frac{\alpha^2 z^2}{r_0 m_e c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) = 370 z^2 \sin^2(\phi) eV^{-1} cm^{-1}$$

Esta radiación constituye un modo subdominante de pérdida de energía. Normalmente menor de un 0.1% de las pérdidas de la partícula cargada en procesos de excitación e ionización atómicos.

Efecto Cherenkov

La energía umbral para producir Cherenkov se obtiene de la condición $v > c/n$ de donde

$$\beta \geq \frac{1}{n}; \quad E_{th} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = mc^2 \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$$



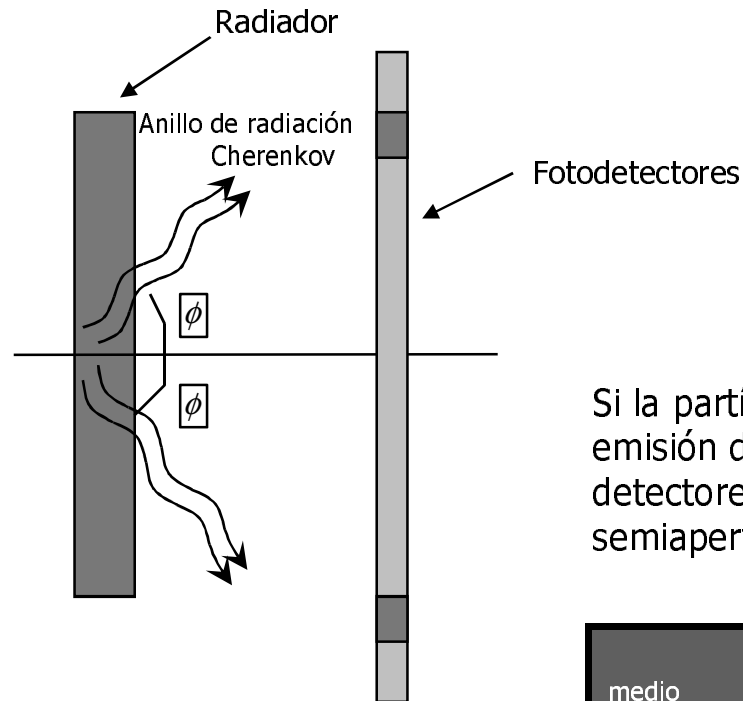
De aquí se obtiene la energía cinética umbral de la partícula en un medio material de índice n para producir efecto Cherenkov

$$T_{th} = mc^2 \left[\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1 \right]$$

Dado que el verdadero umbral de Cherenkov se expresa en términos de velocidad, a igual medio material, un electrón necesitará menor energía para producir radiación Cherenkov que otra partícula con mayor masa (i.e. un muón). Esto se puede usar para distinguir una partículas de otras por el umbral de efecto Cherenkov.

Efecto Cherenkov

Originalmente descubierta por los Curie durante el estudio de la radiactividad está caracterizada por un color azulado intenso.



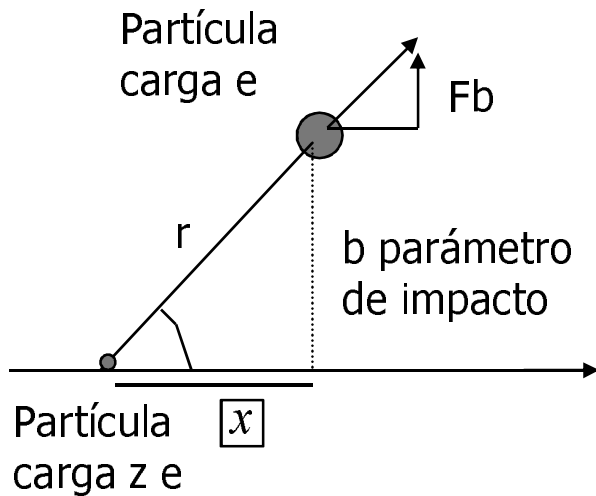
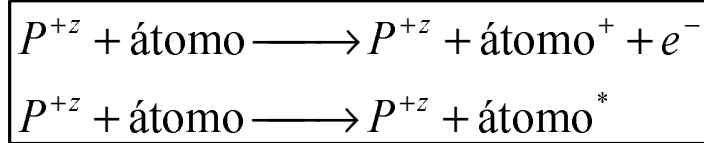
Luz azul por efecto Cherenkov en el agua de un reactor nuclear.

Si la partícula atraviesa una lámina de material, se produce la emisión de la radiación en un cono de luz que será visto por los detectores de luz como un anillo. A partir del ángulo de semiapertura se puede calcular v una vez identificada la partícula.

| medio | n | Angulo max (grados) | Numero de fotones (eV-1 cm-1) | Energía cinética umbral (MeV) electrones |
|-----------|----------|---------------------|-------------------------------|--|
| Aire | 1.000283 | 1.36 | 0.208 | 21 |
| Isobutano | 1.00127 | 2.89 | 0.941 | 9.6 |
| Agua | 1.33 | 41.2 | 160.8 | 0.26 |
| Cuarzo | 1.46 | 46.7 | 196.4 | 0.19 |

Colisiones soft

Consideremos la colisión de ión cargado con carga z con un átomo que da lugar a excitación e ionización atómica en la que participa un solo electrón



Por simetría el cambio de momento lineal de la partícula es aquel que produce la componente de la fuerza Coulombiana en la dirección de la línea de mínima distancia (parámetro de impacto b)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z e^2}{r^2}; \quad F_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z e^2 b}{r^2 r}$$

Por lo tanto el cambio de momento durante la colisión viene dado por

$$\Delta p_b = \int_0^\infty F_b dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z e^2 b}{r^2 r} \frac{dx}{\beta c}$$

Por lo tanto obtenemos que el cambio de momento en la colisión es

$$\Delta p_b = \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \beta c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dx}{(\sqrt{x^2 + b^2})^3} = \frac{z e^2}{4\pi\epsilon_0 \beta c b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{x}{b}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{x}{b}\right)^2 + 1}\right)^3} = \frac{2 z e^2}{4\pi\epsilon_0 \beta c b} = \frac{2 z r_e m_e c}{\beta b}; \quad r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$$

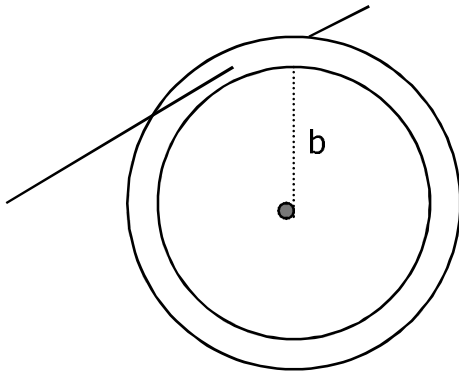
Colisiones soft

Supongamos que la colisión de una partícula cargada con carga z tiene lugar con un electrón del átomo, entonces la transferencia de momento es

$$\Delta p_b = \frac{2 z r_e m_e c}{\beta b}$$

En el límite no relativista esto supone una transferencia de energía dada por

$$\varepsilon = \frac{(\Delta p_b)^2}{2m_e} = \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2 b^2}$$



Recordemos que la probabilidad de interacción P en cm^2/g (por unidad de masa superficial) está relacionada con la sección eficaz σ en cm^2/atomo mediante el número de Avogadro

$$P\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}\right) = \frac{N_A}{A} \sigma\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{atomo}}\right)$$

Entonces la probabilidad de que la partícula cargada ceda una energía entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$ viene dada por la expresión

$$P(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{N_A}{A} Z 2\pi b db$$

Donde asumimos que hay Z electrones por átomo en el material en cuestión.

Colisiones soft

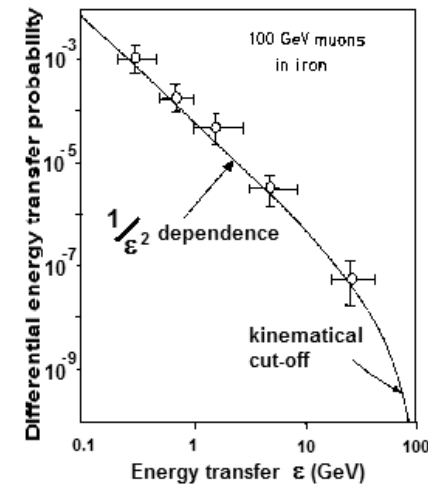
De la relación entre la energía y el parámetro de impacto podemos obtener

$$b^2 = \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2 \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad 2b db = \frac{2z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2 \varepsilon^2} d\varepsilon$$

Por lo tanto la probabilidad de pérdida de energía entre ε y $\varepsilon+d\varepsilon$ será (*)

$$P(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{N_A}{A} Z \pi \frac{2z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2 \varepsilon^2} d\varepsilon$$

Lo que nos indica que la probabilidad de producir electrones δ de una cierta energía es inversamente proporcional al cuadrado de ésta



Para obtener la pérdida de energía en un cierto espesor másico ρdx tendremos que integrar sobre todos los posibles parámetros de impacto b

$$-dE = \int_0^\infty P(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \rho dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{dE}{\rho dx} = \int_0^\infty P(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{N_A}{A} Z 2\pi b \varepsilon db$$

(*) El cálculo mecano-cuántico de la sección eficaz diferencial respecto a la energía T transferida al electrón $d\sigma/dT$ puede encontrarse en D.E. Groom et al., Eur. Phys. Jour. C15 (2000) 1. Esta sección eficaz depende del spin del proyectil.

Colisiones soft

De la relación entre la energía y el parámetro de impacto podemos obtener

$$-\frac{dE}{\rho dx} = \int_0^{\infty} \frac{N_A}{A} Z 2\pi b \varepsilon db = \int_0^{\infty} \frac{N_A}{A} Z 2\pi b \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2 b^2} db$$

Finalmente obtendríamos la integral

$$-\frac{dE}{\rho dx} = Z 2\pi \frac{N_A}{A} \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \int_0^{\infty} \frac{db}{b}$$

Que resultaría ser divergente. Sin embargo, realmente debemos de reconsiderar los límites físicos de integración reescribiendo

$$-\frac{dE}{\rho dx} = Z 2\pi \frac{N_A}{A} \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} = Z 2\pi \frac{N_A}{A} \frac{2 z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)$$

Donde el argumento físico se centra en establecer los límites para los parámetros de impacto, de modo que

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)$$

Colisiones soft

Para establecer los límites físicos de integración, consideraremos que el parámetro de impacto estaba relacionado con la transferencia de energía mediante

$$b^2 \propto \frac{1}{\mathcal{E}}$$

$$b \propto \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

Por lo tanto podríamos relacionar los límites físicos de integración en el parámetro de impacto con los valores máximo y mínimo de energía transferida al electrón

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\mathcal{E}_{\max}}{\mathcal{E}_{\min}}\right)$$

Vimos antes que la máxima energía que podíamos transferir a un electrón en una colisión no muy relativista viene dada por

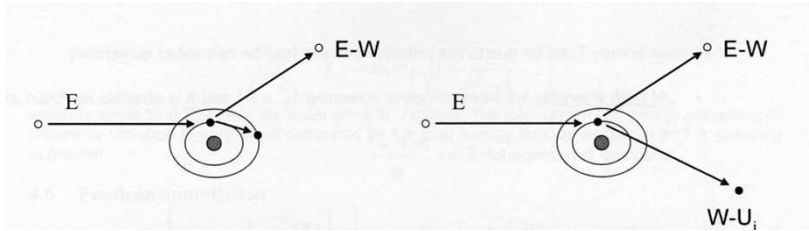
$$\mathcal{E}_{\max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

Mientras que la mínima energía de excitación se corresponde a un valor promedio entre todos los electrones del átomo que normalmente se denota

$$\mathcal{E}_{\min} = I$$

Colisiones soft

Con lo cual podemos escribir la pérdida de energía de nuestro proyectil como



$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right)$$

Esta es nuestra primera aproximación (sólo orientativa) a la fórmula de Bethe-Bloch. El cálculo mecano-cuántico de las colisiones inelásticas de partículas cargadas con átomos individuales fue formulado por primera vez por Bethe (1930 "Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch Materie" Ann. Physik 5, 325-400). En estos trabajos usaba la aproximación de Born a primer orden. Posteriormente sus trabajos fueron corregidos por Bloch y extendidos a las colisiones inelásticas en medios condensados (líquidos y sólidos) por Fano (1963 Ann. Rev. Nucl. Sci. 13, 1-66). La expresión actualmente usada para la pérdida de energía es (PDG, Journal of Physics G Volume 33 July 2006 IOP)

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

Fórmula de Bethe-Bloch

$$\boxed{-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]}$$

Fórmula de Bethe-Bloch para partículas cargadas pesadas moderadamente relativistas (pero no electrones). Se puede escribir como

$$\boxed{-\frac{dE}{\rho dx} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right]}$$

1. La pérdida de energía por unidad de espesor másico no depende de la masa del proyectil. A esta pérdida por unidad de espesor másico se denomina PODER DE FRENADO MÁSIICO.
2. El único parámetro de la cinética del proyectil que aparece es la velocidad!
3. I representa la energía media de excitación del átomo. Su conocimiento es semiempírico.
4. Tmax es la máxima energía que el proyectil puede ceder a un electrón en una colisión. (Ver diap 5)
5. A baja energía la dependencia se comporta como $1/\beta^2$
6. La dependencia sobre el material blanco aparece como Z/A lo cual indica que sobre todo dependemos de la densidad de electrones de éste.

Fórmula de Bethe-Bloch

Si agrupamos los términos del factor multiplicativo de la fórmula de Bethe-Bloch obtenemos

$$\left[-\frac{dE}{\rho dx} = C \frac{1}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right] \right]$$

Siendo

$$\left[C = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 = 0.1535 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \right]$$

una constante de carácter universal para el poder de frenado másico de partículas cargadas pesadas.

| | |
|---|---|
| $\frac{dE}{\rho dx}$ | pérdida media de energía del proyectil por unidad de espesor másico de material |
| N_A | número de Avogadro |
| r_e | radio clásico del electrón $2.818 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ |
| m_e | masa del electrón |
| z | carga del proyectil en unidades de la carga del electrón |
| Z | número atómico del medio material |
| A | número másico del medio material |
| T_{\max} | máxima energía cedida al electrón en una colisión $2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$ cuando $M \gg \gamma m_e$ |
| βc | velocidad del proyectil |
| I | energía media de excitación (función de Z) |
| $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ | |

Fórmula de Bethe-Bloch

La fórmula de Bethe-Bloch también puede reformularse dentro de un desarrollo en potencias de la carga del proyectil z donde esta expresión es el término de primer orden

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

Escribiendo

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 L(\beta)$$

La función $L(\beta)$ se denomina número de frenado (stopping number) y se suele desarrollar en la forma

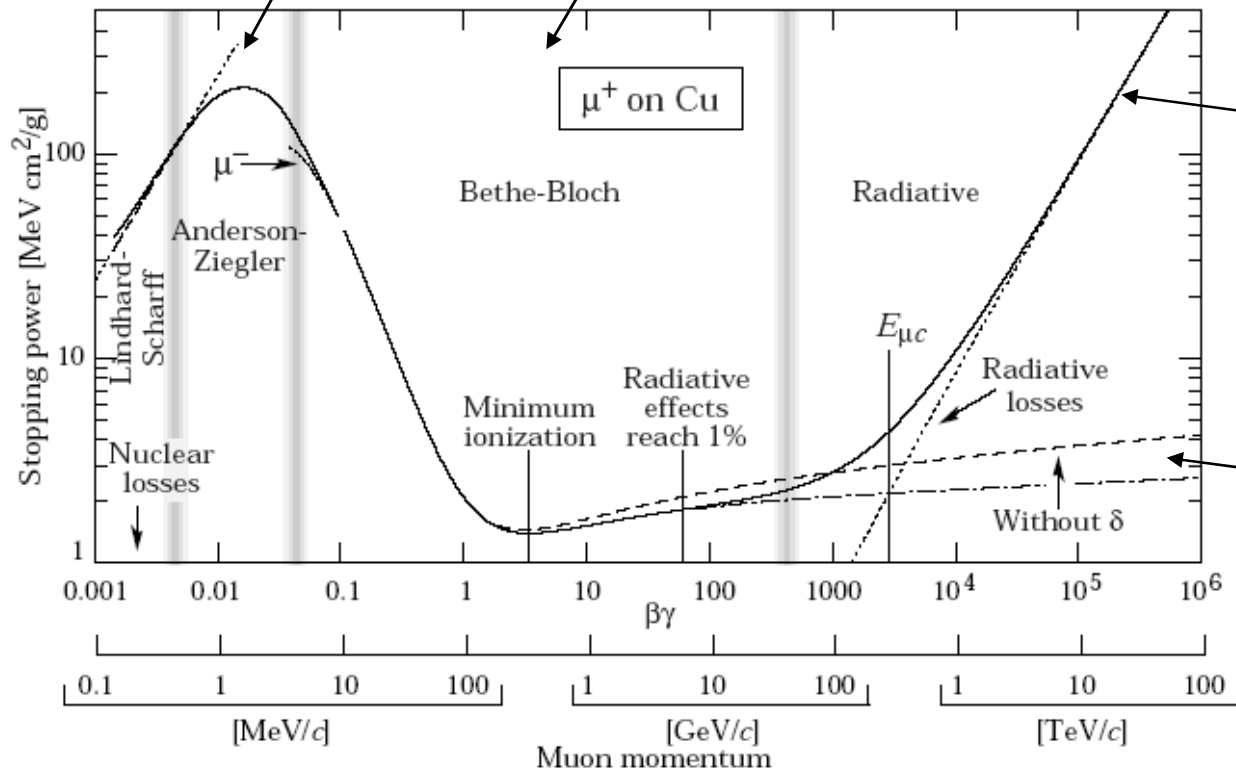
$$L(\beta) = L_0(\beta) + z \cdot L_1(\beta) + z^2 \cdot L_2(\beta) + \dots$$

Al primer término $L_0(\beta)$ se suele llamar el número de frenado primario o término de Fano que representa la contribución principal al frenado por colisión. El término $L_1(\beta)$ se denomina corrección de Barkas (y provoca que el poder de frenado de una partícula negativa sea algo superior al de una partícula positiva) y al término $L_2(\beta)$ corrección de Bloch. Por tanto, tendremos que

$$L_0(\beta) = \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

La fórmula de Bethe-Bloch no es aplicable a muy bajas energías $\beta < 0.05$ (alrededor de 1 MeV para protones)

Bethe-Bloch indica que la forma dominante de las pérdidas de energía para una partícula pesada cargada son las colisiones con electrones atómicos del medio que transfieren su energía en ionización y excitación de estos átomos. Para iones, a este régimen de frenado descrito por la fórmula de Bethe-Bloch, se denomina poder de frenado electrónico.



Las pérdidas de energía debida a bremsstrahlung dominan por encima de una cierta energía denominada crítica (depende de la partícula)

El efecto densiad es importante en sólidos y líquidos a alta energía.

Fig. 27.1: Stopping power ($= \langle -dE/dx \rangle$) for positive muons in copper as a function of $\beta\gamma = p/Mc$ over nine orders of magnitude in momentum (12 orders of magnitude in kinetic energy). Solid curves indicate the total stopping power. Data below the break at $\beta\gamma \approx 0.1$ are taken from ICRU 49 [2], and data at higher energies are from Ref. 1. Vertical bands indicate boundaries between different approximations discussed in the text. The short dotted lines labeled " μ^- " illustrate the "Barkas effect," the dependence of stopping power on projectile charge at very low energies [6].

Fórmula de Bethe-Bloch

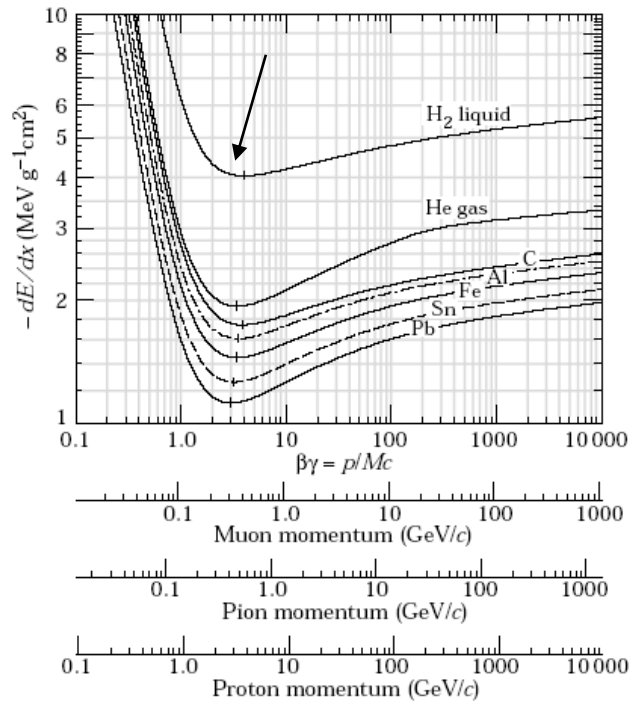
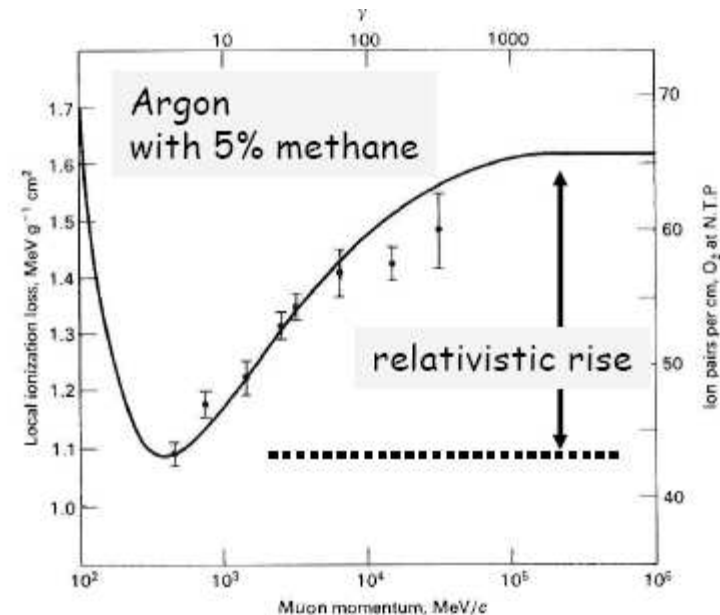


Figure 27.3: Mean energy loss rate in liquid (bubble chamber) hydrogen, gaseous helium, carbon, aluminum, iron, tin, and lead. Radiative effects, relevant for muons and pions, are not included. These become significant for muons in iron for $\beta\gamma \gtrsim 1000$, and at lower momenta for muons in higher- Z absorbers. See Fig. 27.20.

A alta energía la pérdida de energía por unidad de espesor másico sufre un incremento llamado "subida relativista" ya que aunque $\beta \rightarrow 1$ en la fórmula el $\ln(\gamma)$ sigue creciendo. Esto es debido al aumento relativista del campo eléctrico transversal del proyectil. Esta subida es del orden de 1.5 para gases y 1.1 para sólidos.

dE/pdx tiene un mínimo para un valor de $\beta\gamma \sim 3.5$ a 3.0 cuando Z va de 7 a 100 . Este valor mínimo en la pérdida de energía por unidad de espesor másico es aproximadamente universal (ver siguiente página) con un valor de $1.5 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$. Cuando una partícula alcanza esta energía se dice que es una partícula mínimamente ionizante o MIP.



Fórmula de Bethe-Bloch

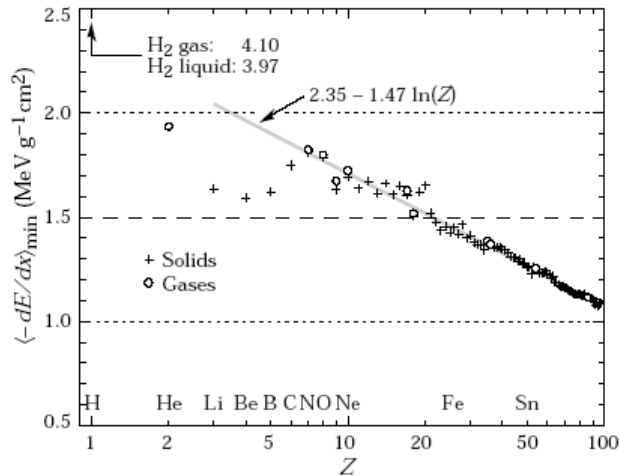


Figure 27.2: Stopping power at minimum ionization for the chemical elements. The straight line is fitted for $Z > 6$. A simple functional dependence on Z is not to be expected, since $\langle -dE/dx \rangle$ also depends on other variables.

La fórmula original de Bethe-Bloch predice que dE/pdx para distintos proyectiles con igual velocidades serían iguales incluso en medios distintos (con igual densidad de electrones). El efecto densidad (polarización del medio) es responsable del comportamiento diferencial entre distintos metriales.

El valor del mínimo de dE/pdx no es absolutamente universal ya que tiene una cierta dependencia de Z .

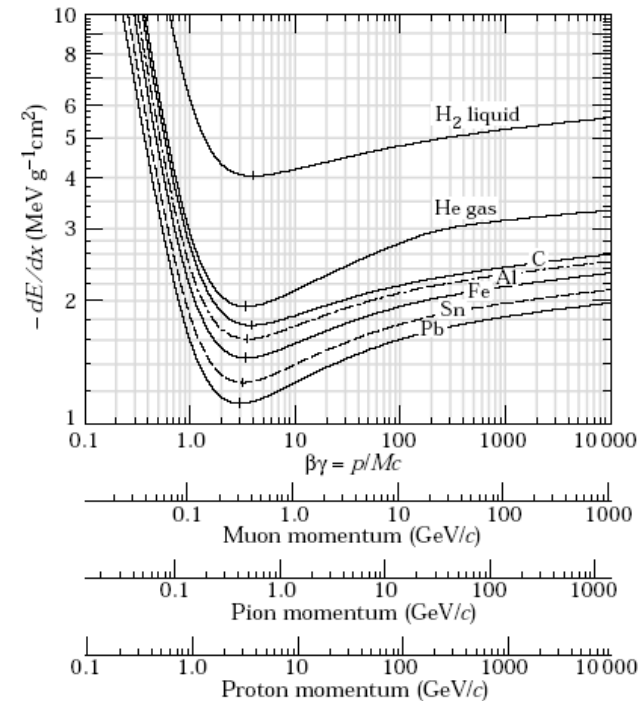


Figure 27.3: Mean energy loss rate in liquid (bubble chamber) hydrogen, gaseous helium, carbon, aluminum, iron, tin, and lead. Radiative effects, relevant for muons and pions, are not included. These become significant for muons in iron for $\beta\gamma \gtrsim 1000$, and at lower momenta for muons in higher- Z absorbers. See Fig. 27.20.

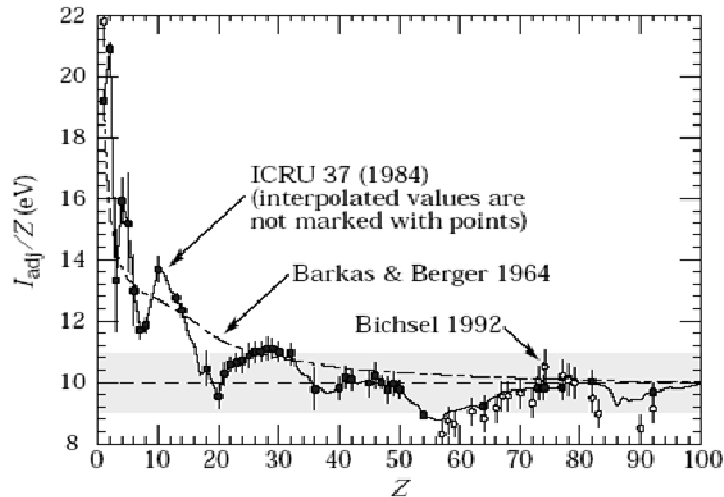
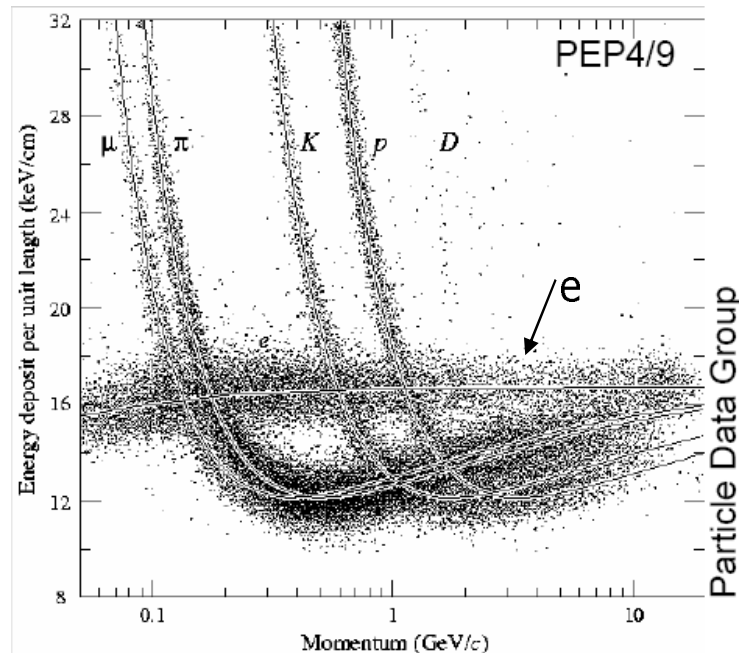


Figure 27.5: Mean excitation energies (divided by Z) as adopted by the ICRU [9]. Those based on experimental measurements are shown by symbols with error flags; the interpolated values are simply joined. The grey point is for liquid H_2 ; the black point at 19.2 eV is for H_2 gas. The open circles show more recent determinations by Bichsel [11]. The dotted curve is from the approximate formula of Barkas [12] used in early editions of this *Review*.

Uno de los puntos cruciales del modelo de Bethe-Bloch es la energía media de excitación atómica I . Se trata de un parámetro difícil de obtener usando un modelo teórico. Normalmente se calcula a través de un modelo semi-empírico (ICRU 37). En primera aproximación se suele considerar aproximadamente I proporcional a Z ($I=10*Z$ a primer orden). Obsérvese que la gráfica nos da I/Z como función de Z mostrando una dependencia más compleja.



En la formulación actual de Bethe-Bloch el orden de precisión con el que se reproduce dE/dx en un cierto material se encuentra dentro del 1% típicamente. En la imagen la reconstrucción de dE/dx a partir de una cámara gaseosa de proyección de tiempo o TPC (Time Projection Chamber PEP4)

Valores del potencial medio de ionización de PEGS4 (EGS) (Iwan Kawrakow 2005)

| Z | | Peso atómico | Dens(g/cm ³) | I (eV) |
|----|----|--------------|--------------------------|--------|
| 1 | H | 1.00797 | 0.0808 | 19.2 |
| 2 | HE | 4.00260 | 0.1900 | 41.8 |
| 3 | LI | 6.93900 | 0.5340 | 40.0 |
| 4 | BE | 9.01220 | 1.8500 | 63.7 |
| 5 | B | 10.81100 | 2.5000 | 76.0 |
| 6 | C | 12.01115 | 2.2600 | 78.0 |
| 7 | N | 14.00670 | 1.1400 | 82.0 |
| 8 | O | 15.99940 | 1.5680 | 95.0 |
| 9 | F | 18.99840 | 1.5000 | 115.0 |
| 10 | NE | 20.18300 | 1.0000 | 137.0 |
| 11 | NA | 22.98980 | 0.9712 | 149.0 |
| 12 | MG | 24.31200 | 1.7400 | 156.0 |
| 13 | AL | 26.98150 | 2.7020 | 166.0 |
| 14 | SI | 28.08800 | 2.4000 | 173.0 |
| 15 | P | 30.97380 | 1.8200 | 173.0 |
| 16 | S | 32.06400 | 2.0700 | 180.0 |
| 17 | CL | 35.45300 | 2.2000 | 174.0 |
| 18 | AR | 39.94800 | 1.6500 | 188.0 |
| 19 | K | 39.10200 | 0.8600 | 190.0 |
| 20 | CA | 40.08000 | 1.5500 | 191.0 |
| 21 | SC | 44.95600 | 3.0200 | 216.0 |
| 22 | TI | 47.90000 | 4.5400 | 233.0 |
| 23 | V | 50.94200 | 5.8700 | 245.0 |
| 24 | CR | 51.99800 | 7.1400 | 257.0 |
| 25 | MN | 54.93800 | 7.3000 | 272.0 |

| Z | | Peso atómico | Dens(g/cm ³) | I (eV) |
|----|----|--------------|--------------------------|--------|
| 26 | FE | 55.84700 | 7.8600 | 286.0 |
| 27 | CO | 58.93320 | 8.7100 | 297.0 |
| 28 | NI | 58.71000 | 8.9000 | 311.0 |
| 29 | CU | 63.54000 | 8.9333 | 322.0 |
| 30 | ZN | 65.37000 | 7.1400 | 330.0 |
| 31 | GA | 69.72000 | 5.9100 | 334.0 |
| 32 | GE | 72.59000 | 5.3600 | 350.0 |
| 33 | AS | 74.92160 | 5.7300 | 347.0 |
| 34 | SE | 78.96000 | 4.8000 | 348.0 |
| 35 | BR | 79.80800 | 4.2000 | 357.0 |
| 36 | KR | 83.80000 | 3.4000 | 352.0 |
| 37 | RB | 85.47000 | 1.5300 | 363.0 |
| 38 | SR | 87.62000 | 2.6000 | 366.0 |
| 39 | Y | 88.90500 | 4.4700 | 379.0 |
| 40 | ZR | 91.22000 | 6.4000 | 393.0 |
| 41 | NB | 92.90600 | 8.5700 | 417.0 |
| 42 | MO | 95.94000 | 9.0100 | 424.0 |
| 43 | TC | 99.00000 | 11.5000 | 428.0 |
| 44 | RU | 101.07000 | 12.2000 | 441.0 |
| 45 | RH | 102.90500 | 12.5000 | 449.0 |
| 46 | PD | 106.40000 | 12.0000 | 470.0 |
| 47 | AG | 107.87000 | 10.5000 | 470.0 |
| 48 | CD | 112.40000 | 8.6500 | 469.0 |
| 49 | IN | 114.82000 | 7.3000 | 488.0 |
| 50 | SN | 118.69000 | 7.3100 | 488.0 |

Valores del potencial medio de ionización de PEGS4 (EGS) (Iwan Kawrakow 2005)

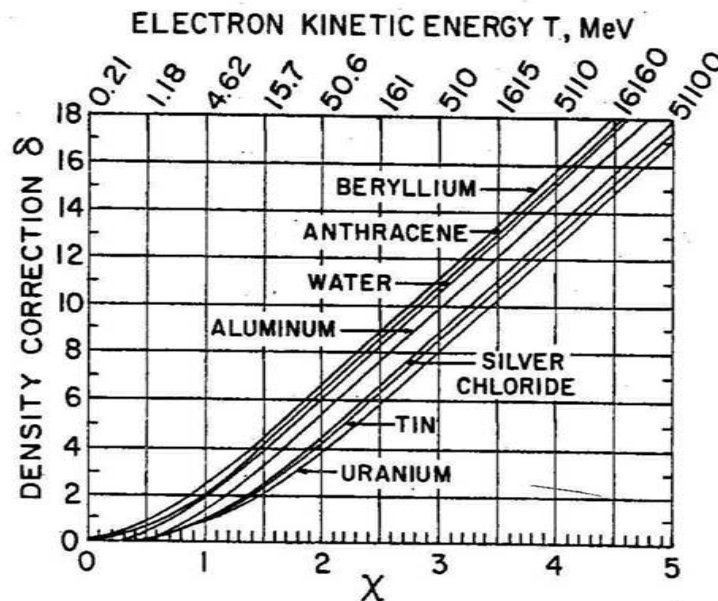
| Z | SB | Peso atómico | Dens(g/cm ³) | I (eV) |
|----|----|--------------|--------------------------|--------|
| 51 | SB | 121.75000 | 6.6840 | 487.0 |
| 52 | TE | 127.60000 | 6.2400 | 485.0 |
| 53 | I | 126.90440 | 4.9300 | 491.0 |
| 54 | XE | 131.30000 | 2.7000 | 482.0 |
| 55 | CS | 132.90500 | 1.8730 | 488.0 |
| 56 | BA | 137.34000 | 3.5000 | 491.0 |
| 57 | LA | 138.91000 | 6.1500 | 501.0 |
| 58 | CE | 140.12000 | 6.9000 | 523.0 |
| 59 | PR | 140.90700 | 6.7690 | 535.0 |
| 60 | ND | 144.24001 | 7.0070 | 546.0 |
| 61 | PM | 147.00000 | 1.0000 | 560.0 |
| 62 | SM | 150.35001 | 7.5400 | 574.0 |
| 63 | EU | 151.98000 | 5.1700 | 580.0 |
| 64 | GD | 157.25000 | 7.8700 | 591.0 |
| 65 | TB | 158.92400 | 8.2500 | 614.0 |
| 66 | DY | 162.50000 | 8.5600 | 628.0 |
| 67 | HO | 164.92999 | 8.8000 | 650.0 |
| 68 | ER | 167.25999 | 9.0600 | 658.0 |
| 69 | TM | 168.93401 | 9.3200 | 674.0 |
| 70 | YB | 173.03999 | 6.9600 | 684.0 |
| 71 | LU | 174.97000 | 9.8500 | 694.0 |
| 72 | HF | 178.49001 | 11.4000 | 705.0 |
| 73 | TA | 180.94800 | 16.6000 | 718.0 |
| 74 | W | 183.85001 | 19.3000 | 727.0 |
| 75 | RE | 186.20000 | 20.5300 | 736.0 |

| Z | OS | Peso atómico | Dens(g/cm ³) | I (eV) |
|-----|----|--------------|--------------------------|--------|
| 76 | OS | 190.20000 | 22.4800 | 746.0 |
| 77 | IR | 192.20000 | 22.4200 | 757.0 |
| 78 | PT | 195.08000 | 21.4500 | 790.0 |
| 79 | AU | 196.98700 | 19.3000 | 790.0 |
| 80 | HG | 200.59000 | 14.1900 | 800.0 |
| 81 | TL | 204.37000 | 11.8500 | 810.0 |
| 82 | PB | 207.19000 | 11.3400 | 823.0 |
| 83 | BI | 208.98000 | 9.7800 | 823.0 |
| 84 | PO | 210.00000 | 9.3000 | 830.0 |
| 85 | AT | 210.00000 | 1.0000 | 825.0 |
| 86 | RN | 222.00000 | 4.0000 | 794.0 |
| 87 | FR | 223.00000 | 1.0000 | 827.0 |
| 88 | RA | 226.00000 | 5.0000 | 826.0 |
| 89 | AC | 227.00000 | 1.0000 | 841.0 |
| 90 | TH | 232.03600 | 11.0000 | 847.0 |
| 91 | PA | 231.00000 | 15.3700 | 878.0 |
| 92 | U | 238.03000 | 18.9000 | 890.0 |
| 93 | NP | 237.00000 | 20.5000 | 902.0 |
| 94 | PU | 242.00000 | 19.7370 | 921.0 |
| 95 | AM | 243.00000 | 11.7000 | 934.0 |
| 96 | CM | 247.00000 | 7.0000 | 939.0 |
| 97 | BK | 247.00000 | 1.0000 | 952.0 |
| 98 | CF | 248.00000 | 1.0000 | 966.0 |
| 99 | ES | 254.00000 | 1.0000 | 980.0 |
| 100 | FM | 253.00000 | 1.0000 | 994.0 |

Fórmula de Bethe-Bloch

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

La corrección por efecto densidad (polarización del medio) δ es una función del producto $\beta\gamma$. Se suele parametrizar δ como una función lineal del parámetro $X = \log_{10}(p/m_0c)$. Siendo m_0 la masa en reposo de la partícula proyectil y p su momento. Estas parametrizaciones provienen del trabajo de R.M. Sternheimer.



Corrección por efecto densidad δ como función del parámetro $X = \log_{10}(p/m_0c)$.

FIGURE 8.4. Density-effect correction δ as a function of χ and electron kinetic energy T . After Sternheimer (1952). Reproduced with permission from R. M. Sternheimer and the American Physical Society.

Fórmula de Bethe-Bloch

La parametrización actualmente usada para el efecto densidad se encuentra en el trabajo de R.M. Sternheimer, Phys. Rev. B26, 6067-6076 (1952). Los parámetros se muestran aquí para Z=1-13

$$\delta = \begin{cases} 2(\ln 10)x - \bar{C} & \text{si } x \geq x_1 \\ 2(\ln 10)x - \bar{C} + a(x_1 - x)^k & \text{si } x_0 \leq x < x_1 \\ 0 & \text{si } x < x_0 \text{ (no conductores)} \\ \delta_0 10^{2(x-x_0)} & \text{si } x < x_0 \text{ (conductores)} \end{cases}$$

Donde

$$x = \log_{10}(p / Mc)$$

Atomic constants, densities, ionization constants, and Sternheimer coefficients for the chemical elements. The ionization constants and Sternheimer coefficients are from Ref. 8, while the errors in the ionization constants are from Ref. 6. The liquid H₂ numbers are for bubble chamber conditions; the density at the boiling point at 1 atm is 0.0708 g cm⁻³. If there is no characteristic terrestrial composition of an element with no stable isotopes, the atomic mass of the most stable is given (see the Periodic Table in RPP94). A density given below is sometimes the average over different allotropes (as with P and Se); it is not corrected because it is the one used to calculate the Sternheimer coefficients. Gas densities are evaluated at 1 atm and 20° C. Parentheses around ionization constants indicate interpolated values.

| Material | Z | A g mol ⁻¹ | ρ g cm ⁻³ | I _{adj} eV | \bar{C} | x ₀ | x ₁ | a | k | δ ₀ |
|-------------------------|----|--------------------------|-------------------------|------------------------|-----------|----------------|----------------|--------|--------|----------------|
| H ₂ gas | 1 | 1.00797 | 8.37 × 10 ⁻⁵ | 19.2 ± 0.4 | 9.5835 | 1.8639 | 3.2718 | 0.1409 | 5.7273 | 0.00 |
| H ₂ liq (BC) | 1 | 1.00797 | 6.00 × 10 ⁻² | 21.8 ± 0.4 | 3.2632 | 0.4759 | 1.9215 | 0.1348 | 5.6249 | 0.00 |
| He gas | 2 | 4.0026 | 1.66 × 10 ⁻⁴ | 41.8 ± 0.8 | 11.1393 | 2.2017 | 3.6122 | 0.1344 | 5.8347 | 0.00 |
| Li | 3 | 6.939 | 0.534 | 40 ± 5 | 3.1221 | 0.1304 | 1.6397 | 0.9514 | 2.4993 | 0.14 |
| Be | 4 | 9.0122 | 1.848 | 63.7 ± 3 | 2.7847 | 0.0592 | 1.6922 | 0.8039 | 2.4339 | 0.14 |
| B | 5 | 10.811 | 2.37 | 76 ± 8 | 2.8477 | 0.0305 | 1.9688 | 0.5622 | 2.4512 | 0.14 |
| C graphite | 6 | 12.01115 | 2.265 | 78 ± 7 | 2.8680 | -0.0178 | 2.3415 | 0.2614 | 2.8697 | 0.12 |
| C graphite | 6 | 12.01115 | 2.0 | 78 ± 7 | 2.9925 | -0.0351 | 2.4860 | 0.2024 | 3.0036 | 0.10 |
| C graphite | 6 | 12.01115 | 1.7 | 78 ± 7 | 3.1550 | 0.0480 | 2.5387 | 0.2076 | 2.9532 | 0.14 |
| N ₂ gas | 7 | 14.0067 | 1.17 × 10 ⁻³ | 82 ± 2 | 10.5400 | 1.7378 | 4.1323 | 0.1535 | 3.2125 | 0.00 |
| O ₂ gas | 8 | 15.9994 | 1.33 × 10 ⁻³ | 95 ± 2 | 10.7004 | 1.7541 | 4.3213 | 0.1178 | 3.2913 | 0.00 |
| F ₂ gas | 9 | 18.9984 | 1.58 × 10 ⁻³ | (115 ± 10) | 10.9653 | 1.8433 | 4.4096 | 0.1108 | 3.2962 | 0.00 |
| Ne gas | 10 | 20.183 | 8.39 × 10 ⁻⁴ | 137 ± 4 | 11.9041 | 2.0735 | 4.6421 | 0.0806 | 3.5771 | 0.00 |
| Na | 11 | 22.9898 | 0.971 | (149 ± 10) | 5.0526 | 0.2880 | 3.1962 | 0.0777 | 3.6452 | 0.08 |
| Mg | 12 | 24.312 | 1.74 | (156 ± 10) | 4.5297 | 0.1499 | 3.0668 | 0.0816 | 3.6166 | 0.08 |
| Al | 13 | 26.9815 | 2.699 | 166 ± 2 | 4.2395 | 0.1708 | 3.0127 | 0.0802 | 3.6345 | 0.12 |

Fórmula de Bethe-Bloch

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

En el régimen de baja energía la aproximación de que la velocidad del proyectil es superior a la de los electrones atómicos empieza a fallar. Esencialmente cuando se reduce la energía del proyectil éste deja de producir excitaciones o ionizaciones de los estados electrónicos de las capas internas del átomo. Este efecto (shell correction) modifica el valor real de dE/dx en la fórmula de Bethe-Bloch. El valor de C/Z es una función de la velocidad de la partícula y del medio material. C/Z tiende a cero a altas energías.

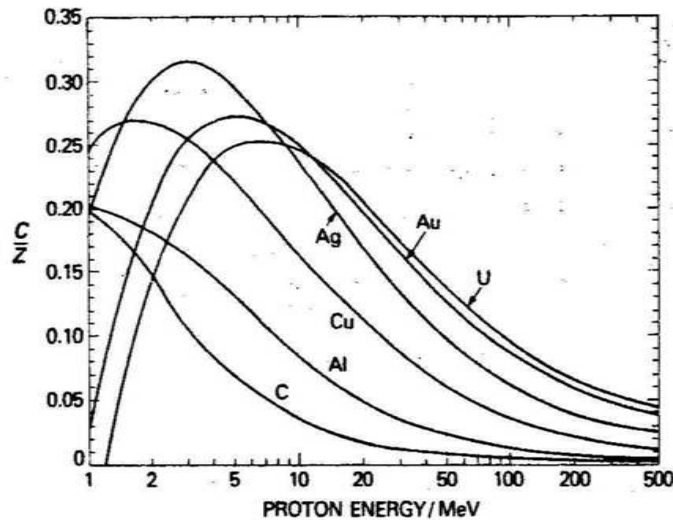


FIGURE 8.3. Semiempirical shell corrections of Bichsel for selected elements, as a function of the proton energy (ICRU, 1984a). Reproduced with permission from H. Bichsel and the International Commission on Radiological Units and Measurements.

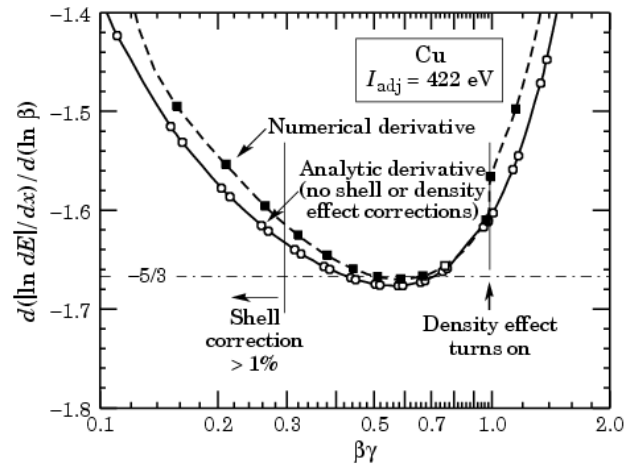
Corrección de capas en la fórmula de Bethe-Bloch expresadas en función de la energía para protones.

Fórmula de Bethe-Bloch

Las parametrizaciones habituales de la corrección de capas provienen del trabajo de Barkas (W.H. Barkas y M.J. Berger "Tables of Energy Losses and Ranges of Heavy Charged Particles", NASA-SP-3013 (1964)

$$C = (0.422377\eta^{-2} + 0.0304043\eta^{-4} - 0.00038106\eta^{-6}) \times 10^{-6} I^2 + (3.858019\eta^{-2} - 0.1667989\eta^{-4} + 0.00157955\eta^{-6}) \times 10^{-9} I^3$$

$$\eta = \beta\gamma \quad (\text{fórmula válida si } \eta > 0.13)$$



Gráfica mostrando la contribución del efecto densidad y de la corrección de capas.

Figure 4: The logarithmic derivative of $|dE/dx|$ with respect to β . Analytic derivatives were calculated at the pairs of abscissas shown by the open points, using Eq. (5) without the shell or density corrections; values including these corrections were differenced to obtain the solid points. The Sternheimer form for the density correction has a discontinuous derivative at $x_0 = \log_{10} \beta\gamma$; the metallic correction for smaller x 's was not used in this calculation. $|dE/dx| \propto \beta^{-5/3}$ is shown in Fig. 1, along with the $|dE/dx| \propto \beta^{-2}$ form described in most references.

Iones a baja energía

Para partículas cargadas pesadas, la fórmula de Bethe-Bloch deja de reproducir el comportamiento empírico para $\beta < 0.05$

En el rango $0.01 < \beta < 0.05$ no existe una teoría satisfactoria. En esta región de baja velocidad se produce un efecto de apantallamiento de la carga del ión o partícula cargada que a veces se denomina "modelo dieléctrico".

A baja energía $0.01 > \beta$ los iones se frenan por colisiones con los núcleos del material. A esta contribución se suele llamar poder de frenado nuclear.

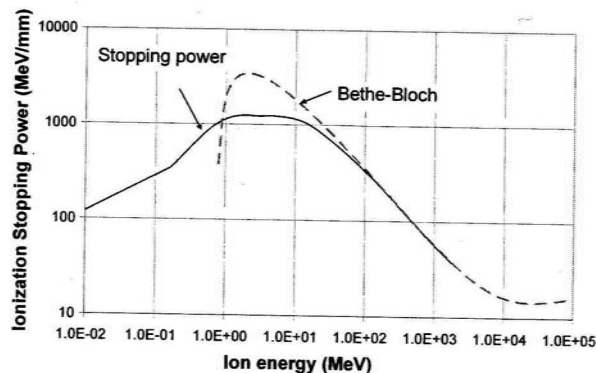
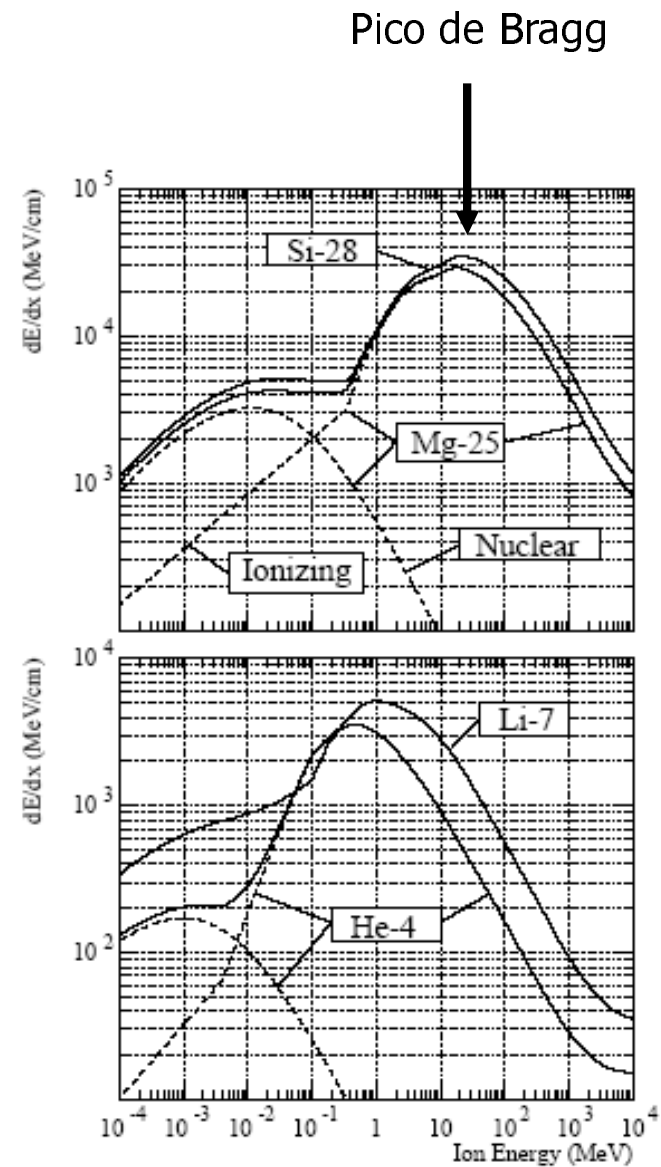


Figure 22: Stopping power (ionization) of silicon ion in silicon. The solid line is the "real" stopping power [25] and the dashed curve is the Bethe-Bloch Formula (equation 58) in which we have neglected the shell correction and the density correction.



Iones a baja energía

A baja energía Linhard y Scharff (J. Linhard y M. Scharff "Energy dissipation by ions in the keV region", Phys. Rev. 124 (1961)) mostraron que el poder de frenado se puede escribir como una función (lineal) de la velocidad. En general se suele ajustar a una ley de potencias en E, de la forma

$$\left(-\frac{dE}{dx} \right) = k E^a$$

A alta energía la aproximación de Bethe-Bloch es válida considerando que el ión tiene su carga correspondiente a la ionización completa. A energías intermedias se considera que el ión modifica localmente la constante dieléctrica del medio. En esta región de energías el valor del poder de frenado alcanza un máximo que se denomina pico de Bragg.

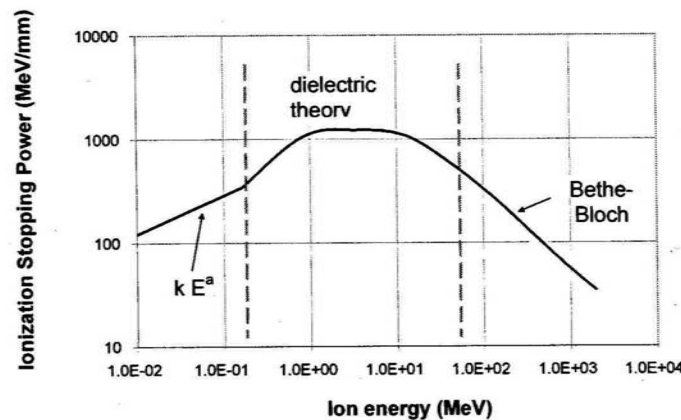


Figure 23: Stopping power (ionization) of silicon ion in silicon. Three theories are needed to obtain the stopping power involving ionization.

Pico de Bragg

Consideremos un ión o una partícula cargada pesada que se propaga en un medio material. La pérdida de energía responde a la fórmula de Bethe-Bloch

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

Durante el recorrido en el medio el ión tiene su carga desnuda, y su pérdida de energía dE/dx aumenta al disminuir su velocidad. Al llegar a velocidades bajas parte de la carga del ión se recombina, reduciendo el valor de dE/dx . A la curva donde se representa dE/dx en función de la distancia de penetración de la partícula se conoce como curva de Bragg. Esta curva alcanza un máximo conocido como pico de Bragg a una distancia de penetración que depende de la energía cinética original de la partícula.

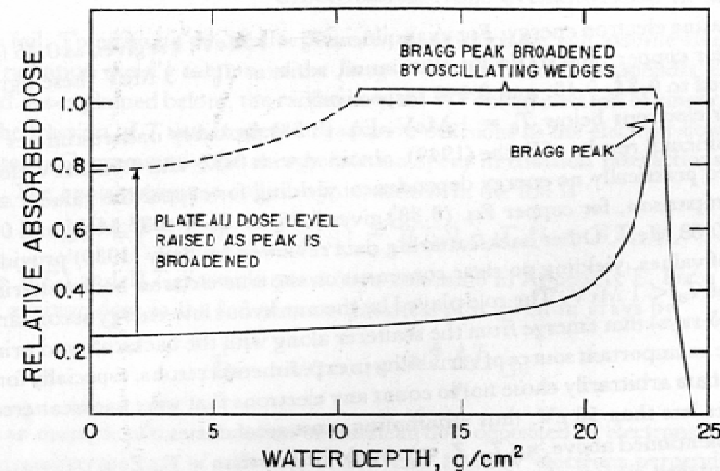
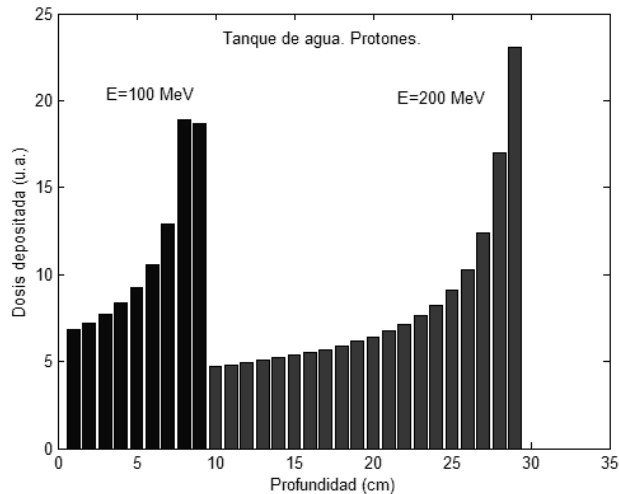


FIGURE 8.13a. Dose vs. depth for 187-MeV protons in water, showing Bragg peak. The dashed curve demonstrates the effect of passing the beam through optimally designed, variable-thickness absorbers such as oscillating wedges. (After Karlsson, 1964. Reproduced with permission from Strahlentherapie.)

Poder de frenado: electrones y positrones

La anterior fórmula de Bethe-Bloch es válida para partículas cuya masa es significativamente mayor que la del electrón: muones, mesones cargados, iones, etc... Sin embargo no podemos aplicarla exactamente a un electrón o positrón. La interacción de los electrones atómicos con el electrón incidente se conoce como scattering Möller, y como scattering Bhabha para los antielectrones.

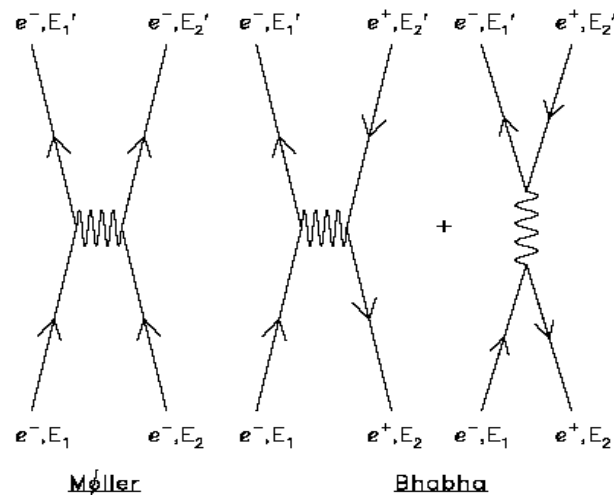


Figure 2.2: Feynman diagrams depicting the Möller and Bhabha interactions. Note the extra interaction channel in the case of the Bhabha interaction.

Además de los diferentes canales de interacción, es habitual debido a la indistinguibilidad cuántica de los electrones asignar como electrón primario al que tenga mayor energía después del scattering. Por esta razón el electrón sólo puede ceder como máximo la mitad de su energía, mientras que el positrón puede ceder toda su energía al electrón atómico.

Poder de frenado para electrones y positrones

La ecuación para el poder de frenado másico de electrones y positrones se suele denominar por algunos autores como fórmula de Berger-Seltzer (H.Messel and D.F.Crawford. Pergamon Press,Oxford,1970)

$$\boxed{-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{(m_e c^2)^2 \beta^2 \gamma^2 (\gamma - 1)}{I^2} \right) - G^\pm(\beta) - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]}$$

La función G^+ corresponde a positrones y la G^- corresponde a electrones.

$$\boxed{G^-(\beta) = \frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{(\gamma-1)^2}{8} + 1 - (\gamma^2 + 2\gamma - 1) \ln(2) \right]}$$

$$\boxed{G^+(\beta) = -\frac{\beta^2}{24} \left[23 + \frac{14}{\gamma+1} + \frac{10}{(\gamma+1)^2} + \frac{4}{(\gamma+1)^3} \right] + \frac{\ln(2)}{2}}$$

Podemos encontrar expresiones equivalentes en Knoll y Attix. En muchas referencias es habitual usar en lugar de β y γ la fracción de la energía cinética sobre la energía en reposo.

$$\boxed{\tau = \frac{T}{m_e c^2}; \quad \tau = \gamma - 1; \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

Poder de frenado para electrones y positrones

La ecuación anterior también se puede reescribir como

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\ln \left(\frac{(m_e c^2)^2 \tau^2 (\tau + 2)}{2I^2} \right) - H^\pm(\tau) - \delta - \frac{2C}{Z} \right]$$

$$\tau = \frac{T}{m_e c^2}$$

Siendo T la energía cinética del electrón incidente

La función H^+ corresponde a positrones y la H^- corresponde a electrones.

$$H^-(\tau) = 1 - \beta^2 + \frac{1}{(1 + \tau)^2} \left[\frac{\tau^2}{8} - (2\tau + 1) \ln(2) \right]$$

$$H^+(\tau) = 2 \ln(2) - \frac{\beta^2}{12} \left[23 + \frac{14}{\tau + 2} + \frac{10}{(\tau + 2)^2} + \frac{4}{(\tau + 2)^3} \right]$$

Esta expresión y la de la diapositiva anterior son equivalentes.

Ejemplo

Consideremos una partícula alpha de 5 MeV en silicio. Calcular su poder de frenado (despreciando el efecto densidad y la corrección de capas)

$$-\frac{dE}{\rho dx} \approx 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I} \right) - \beta^2 \right] = 0.307 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 \right]$$

$$\rho = 2.33 \text{ g/cm}^3; \quad Z = 14; \quad A = 28; \quad z = 2; \quad I = 173 \text{ eV}$$

$$\gamma = 1 + \frac{T}{Mc^2} = 1 + \frac{5}{4 \times 931.5} = 1.00134; \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 0.00268$$

$$-\frac{dE}{\rho dx} \approx 0.307 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{14}{28} \frac{2^2}{0.00268} \left[\ln \left(\frac{2(0.511)(0.00268)(1.00134)^2}{173 \times 10^{-6}} \right) - 0.00268 \right] = 633 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

Si considerasemos el poder de frenado lineal entonces

$$-\frac{dE}{dx} = 633 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \rho = 633 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \cdot 2.33 \text{ g cm}^{-3} = 1.47 \cdot 10^3 \text{ MeV cm}^{-1}$$

Si el poder de frenado fuera constante durante el movimiento del ión (cosa que no es cierta... de hecho aumenta cuando disminuye su velocidad!)

$$X \leq \frac{T}{-\frac{dE}{dx}} = \frac{5 \text{ MeV}}{1.47 \cdot 10^3 \text{ MeV cm}^{-1}} = 3.4 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

Ejemplo

Consideremos una electrón de 5 MeV en silicio. Calcular su poder de frenado (despreciando el efecto densidad y la corrección de capas)

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{(m_e c^2)^2 \beta^2 \gamma^2 (\gamma - 1)}{I^2} \right) - \frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{(\gamma - 1)^2}{8} + 1 - (\gamma^2 + 2\gamma - 1) \ln(2) \right] - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

$$-\frac{dE}{\rho dx} \approx 0.307 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{1}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\ln \left(\frac{(m_e c^2) \beta \gamma \sqrt{\gamma - 1}}{I} \right) - \frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{(\gamma - 1)^2}{8} + 1 - (\gamma^2 + 2\gamma - 1) \ln(2) \right] \right]$$

$$\rho = 2.33 \text{ g/cm}^3; \quad Z = 14; \quad A = 28; \quad I = 173 \text{ eV}$$

$$\gamma = 1 + \frac{T}{m_e c^2} = 1 + \frac{5}{0.511} = 10.785; \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 0.9914$$

$$-\frac{dE}{\rho dx} \approx 0.307 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{14}{28} \frac{1}{0.9914} \left[\ln \left(\frac{(0.511)(\sqrt{0.9914})(10.785)(\sqrt{10.785-1})}{173 \times 10^{-6}} \right) - \frac{1}{2(10.785)^2} \left[\frac{(10.785-1)^2}{8} + 1 - ((10.785)^2 + 2 \cdot 10.785 - 1) \ln(2) \right] \right]$$

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 1.83 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

Lo cual representa un poder de frenado 1000 veces menor que la partícula alpha!!

En términos del poder de frenado lineal

$$-\frac{dE}{dx} = 1.83 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \rho = 1.83 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \cdot 2.33 \text{ g cm}^{-3} = 4.28 \text{ MeV cm}^{-1}$$

De nuevo si el electrón mantuviera su poder de frenado constante durante su movimiento, recorrería más de un cm (esto no es así exactamente!!) pero nos da una idea de la longitud que recorre el electrón.

Poder de frenado en compuestos

En la mayoría de los casos tenemos que calcular el poder de frenado de partículas en compuestos en lugar de sustancias puras. En este caso se considera que

$$\left(\frac{dE}{\rho dx} \right)_{comp} = \omega_1 \left(\frac{dE}{\rho dx} \right)_1 + \omega_2 \left(\frac{dE}{\rho dx} \right)_2 + \omega_3 \left(\frac{dE}{\rho dx} \right)_3 + \dots$$

Donde w_1, w_2, w_3, \dots son las proporciones en peso de cada elemento con números atómicos Z_1, Z_2, Z_3, \dots . Si obviamos los términos de efecto densidad y de corrección de capas. Podemos escribir (considerando las pérdidas energéticas en valor absoluto)

$$\left(\frac{dE}{\rho dx} \right)_i \approx K \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{Z}{A} \right)_i z^2 \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I_i} \right) - \beta^2 \right]$$

$$\left(\frac{dE}{\rho dx} \right)_{comp} \approx K \frac{z^2}{\beta^2} \left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A} \right)_1 \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I_1} \right) + \omega_2 \left(\frac{Z}{A} \right)_2 \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I_2} \right) + \dots - \beta^2 \right]$$

$$\left(\frac{dE}{\rho dx} \right)_{comp} \approx K \frac{z^2}{\beta^2} \left\{ \ln(2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2) \left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A} \right)_1 + \omega_2 \left(\frac{Z}{A} \right)_2 + \dots \right] - \left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A} \right)_1 \ln(I_1) + \omega_2 \left(\frac{Z}{A} \right)_2 \ln(I_2) + \dots \right] - \beta^2 \right\}$$

Lo habitual es definir el cociente Z/A efectivo para el compuesto

$$\left(\frac{Z}{A} \right)_{comp} = \left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A} \right)_1 + \omega_2 \left(\frac{Z}{A} \right)_2 + \dots \right]$$

Poder de frenado en compuestos

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{comp} = K \frac{z^2}{\beta^2} \left\{ \ln(2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2) \left(\frac{Z}{A}\right)_{comp} - \left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 \ln(I_1) + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 \ln(I_2) + \dots \right] - \beta^2 \right\}$$

Con esta definición sería interesante tener una parametrización del potencial de excitación medio efectivo de manera que se cumpliera

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{comp} \approx K \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{Z}{A}\right)_{comp} z^2 \left[\ln\left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I_{comp}}\right) - \beta^2 \right]$$

Para obtener esta parametrización resulta natural considerar que

$$\left(\frac{Z}{A}\right)_{comp} \ln(I_{comp}) = \omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 \ln(I_1) + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 \ln(I_2) + \dots$$

De aquí obtenemos el valor efectivo del potencial de excitación medio del compuesto

$$\ln(I_{comp}) = \frac{\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 \ln(I_1) + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 \ln(I_2) + \dots}{\left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 + \dots \right]}$$

Análogamente se puede obtener el valor efectivo para el efecto densidad en el medio

$$\delta_{comp} = \frac{\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 \delta_1 + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 \delta_2 + \dots}{\left[\omega_1 \left(\frac{Z}{A}\right)_1 + \omega_2 \left(\frac{Z}{A}\right)_2 + \dots \right]}$$

Poder de frenado por colisión

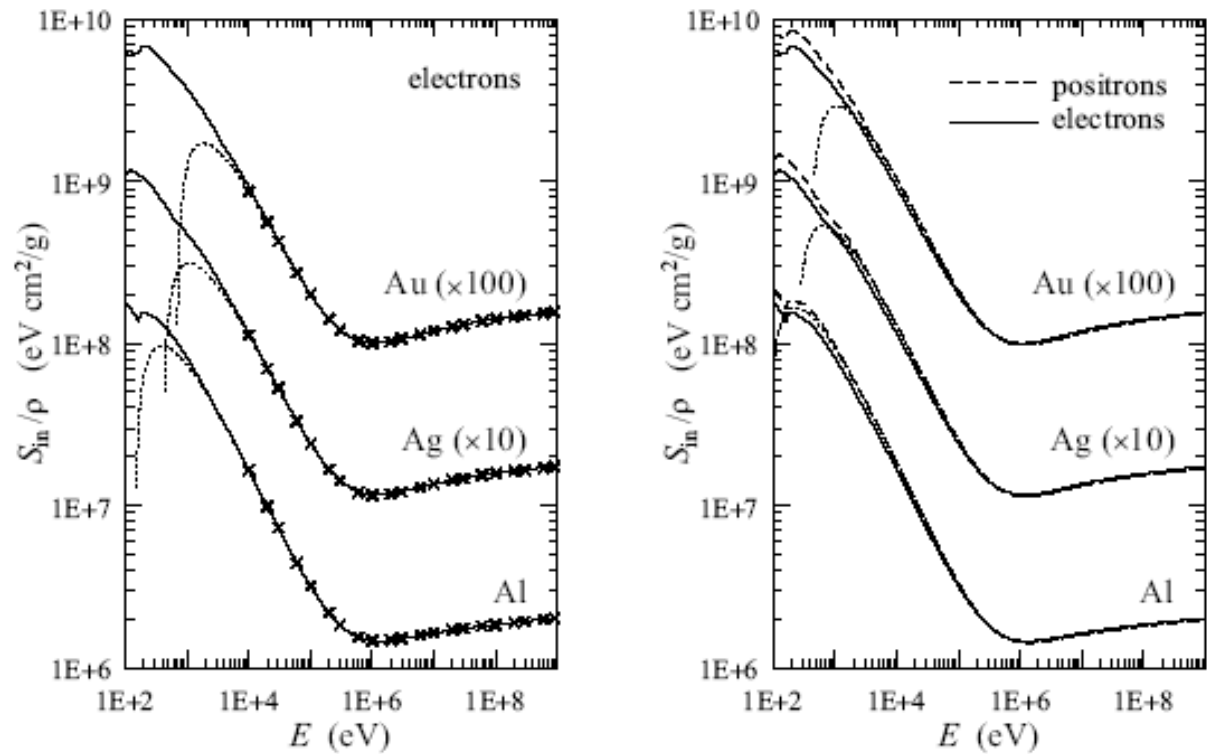


Figure 3.10: Collision stopping power S_{in}/ρ for electrons and positrons in Al, Ag ($\times 10$) and Au ($\times 100$) as a function of the kinetic energy. Continuous and dashed curves are results from the present model. Crosses are data from the ICRU37 tables (1984) [also, Berger and Seltzer, 1982)]. The dotted curves are predictions from the Bethe formula (3.105), for electrons and positrons.

Poder de frenado en metales (Au, Ag y Al) (Penelope). En estos materiales las colisiones que causan la pérdida dominante de energía son debidas a colisiones con electrones de la banda de conducción.

Frenado en pequeños espesores

- La fórmula de Bethe-Bloch describe la pérdida media de energía por unidad de espesor másico.
- El número de colisiones en un espesor dado sigue una distribución de Poisson. Cuando este número es lo bastante grande se puede decir que las fluctuaciones en dE/dx son gaussianas.
- Cuando el número de colisiones es muy bajo en espesores pequeños (i.e. detector gaseoso a presión ambiente para una partícula de mínima ionización el número de colisiones es del orden de 10 por cm) las fluctuaciones respecto al valor medio de energía de frenado de la partícula son muy importantes. Estas fluctuaciones fueron descritas en un modelo desarrollado por Landau y Vavilov (L. Landau, J. Physics (USSR) 8 (1944) 201).
- Consideremos ΔE la energía depositada en un espesor de material X y sea ΔE_{mp} el valor más probable de la pérdida de energía en este espesor, entonces construimos la variable normalizada

$$\lambda = \frac{\Delta E - \Delta E_{mp}}{\xi}; \quad \xi = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \rho X$$

La función de densidad de probabilidad para la variable λ viene dada por

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda + \exp(-\lambda))\right]$$

La cual se conoce habitualmente como la distribución de Landau.

Frenado en pequeños espesores

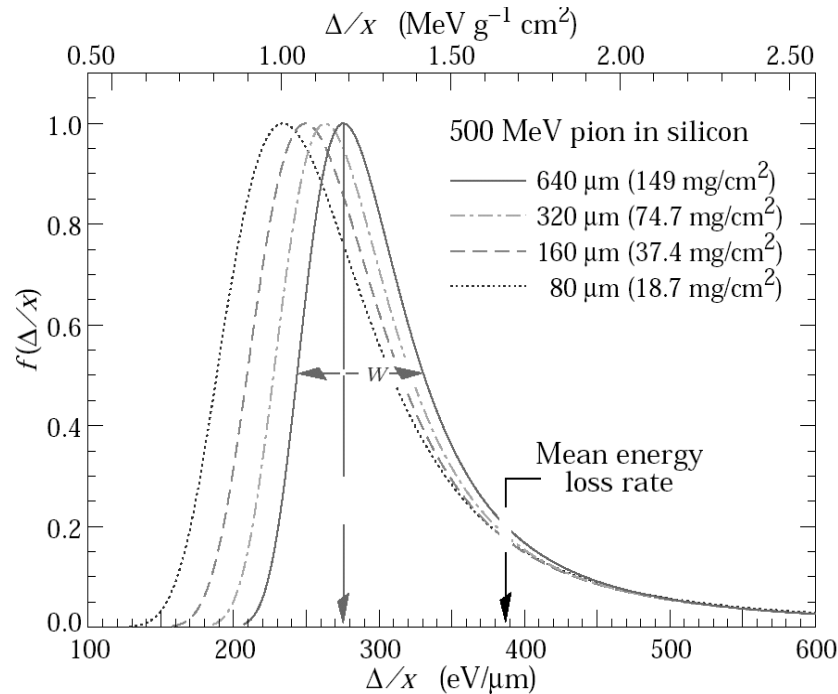


Figure 26.6: Straggling functions in silicon for 500 MeV pions, normalized to unity at the most probable value Δ_p/x . The width w is the full width at half maximum.

Pérdida de energía más probable como función del producto $\beta\gamma$

Distribución de la deposición de energía por piones de 500 MeV en detectores de Si de diferentes espesores. Se observa la forma de la distribución de Landau. El valor medio de la pérdida de energía es mucho mayor que el valor más probable de pérdida de energía. La larga cola de altas pérdidas de energía corresponde a sucesos donde se producen uno o varios electrones δ .

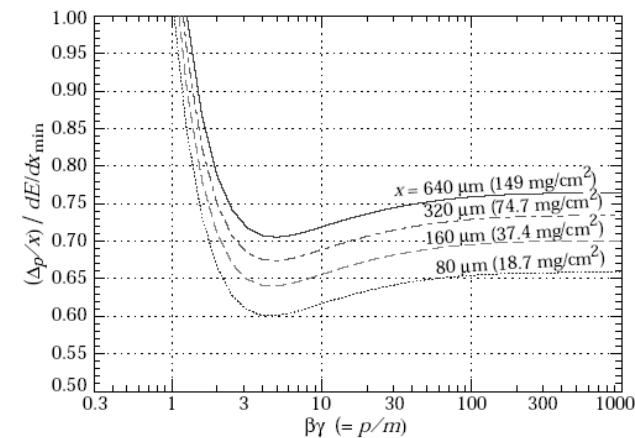
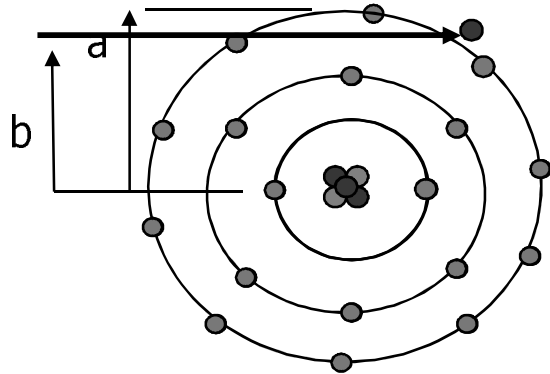


Figure 27.7: Most probable energy loss in silicon, scaled to the mean loss of a minimum ionizing particle, $388 \text{ eV}/\mu\text{m}$ ($1.66 \text{ MeV g}^{-1}\text{cm}^2$).

Colisiones hard



Colisiones "hard" $a \sim b$

En estas colisiones el proyectil incide sobre el átomo con un pequeño parámetro de impacto. En esta situación lo más probable es que el proyectil interactúe con un solo electrón del átomo que adquiere una elevada energía cinética. Este tipo de electrones se llaman rayos δ , y disipan su energía a una cierta distancia de la trayectoria original del proyectil.

El tratamiento de la producción de rayos δ suele hacerse estableciendo un valor de corte en la energía cinética transmitida a un electrón en una colisión individual. Las pérdidas de energía tales que $0 < T < T_{cut} < T_{max}$ vienen dadas por

$$\left. -\frac{dE}{\rho dx} \right|_{T < T_{cut}} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{cut}}{I^2} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{T_{cut}}{T_{max}} \right) - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

La expresión anterior tiende a Bethe-Bloch cuando $T_{cut} \rightarrow T_{max}$

La distribución de electrones δ con $I \ll T < T_{max}$ por unidad de espesor másico

$$-\frac{d^2 N}{\rho dx dT} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \frac{F(T)}{T^2}$$

La función $F(T)$ es dependiente del spin del proyectil y β corresponde a la velocidad de éste.

Colisiones hard

En la fórmula

$$-\frac{d^2N}{\rho dx dT} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \frac{F(T)}{T^2}$$

Si la partícula primaria es de spin cero (i.e. alpha), entonces

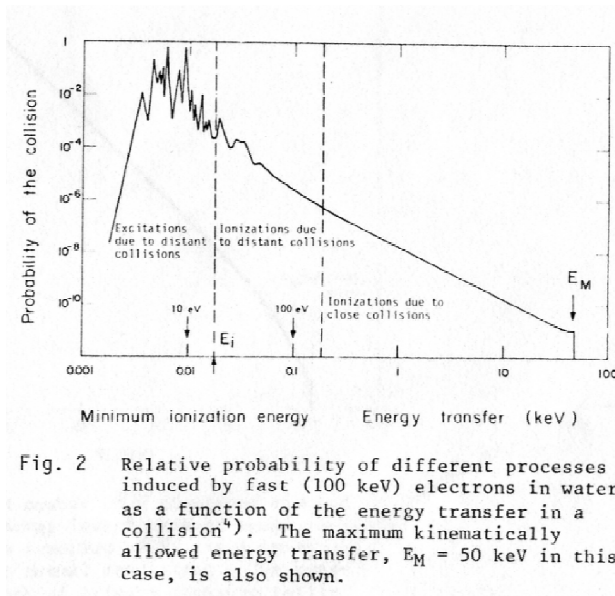
$$F(T) = 1 - \beta^2 \frac{T}{T_{\max}}$$

La dependencia de las funciones F(T) está descrita en Rossi "High Energy Particles" Prentice-Hall (1952). Hay que señalar que los valores típicos de pérdida de energía por colisión se sitúan entorno a los 20 eV, mientras que un electrón δ de 1 keV o más es un suceso poco frecuente. En el caso spin cero podemos calcular esta contribución escribiendo

$$-\frac{dE}{\rho dx} \Big|_{\text{rayos } \delta} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \int_{T_{\text{cut}}}^{T_{\max}} dT \frac{F(T)}{T} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \int_{T_{\text{cut}}}^{T_{\max}} dT \left(\frac{1}{T} - \frac{\beta^2}{T_{\max}} \right)$$

$$-\frac{dE}{\rho dx} \Big|_{\text{rayos } \delta} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left(\ln \left(\frac{T_{\max}}{T_{\text{cut}}} \right) - \beta^2 \left(1 - \frac{T_{\text{cut}}}{T_{\max}} \right) \right)$$

(Para electrones Tmax sólo puede valer E/2 siendo E la energía cinética del electrón primario)



Ejemplo

Consideremos de nuevo una partícula alpha de 5 MeV en silicio. Si consideramos $T_{cut} = 1\text{keV}$, entonces

$$\left. -\frac{dE}{\rho dx} \right|_{\text{rayos } \delta} = 0.1535 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left(\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{T_{cut}} \right) - \beta^2 \left(1 - \frac{T_{cut}}{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2} \right) \right)$$

Sustituyendo tendremos que

$$\left. -\frac{dE}{\rho dx} \right|_{\text{rayos } \delta} = 0.1535 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \frac{14}{28} \frac{2^2}{0.0027} \left(\ln \left(\frac{2(0.511)(0.0027)(10013)^2}{1 \times 10^{-3}} \right) - (0.0027) \left(1 - \frac{1 \times 10^{-3}}{2(0.511)(0.0027)(10013)^2} \right) \right)$$

De lo que obtenemos una estimación

$$\left. -\frac{dE}{\rho dx} \right|_{\text{rayos } \delta} = 115 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

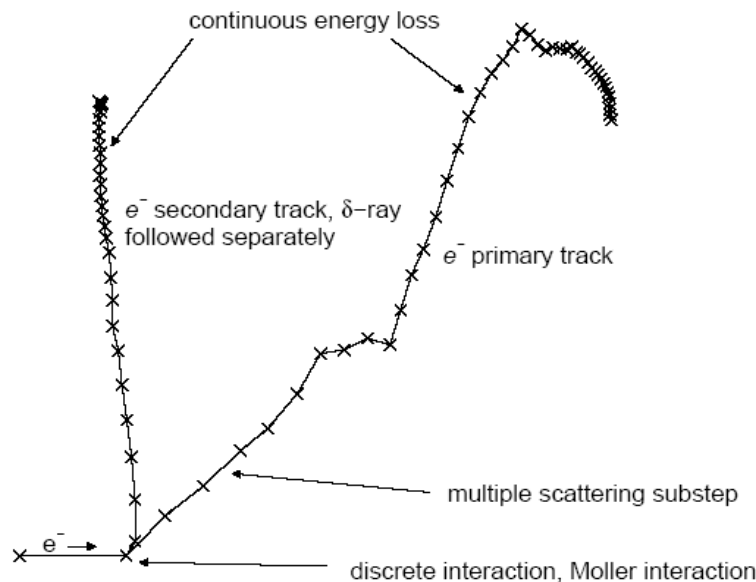
$$-\frac{dE}{\rho dx} = 633 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

Por tanto aproximadamente 1/6 de la pérdida energética da lugar a electrones con energía cinética mayor que 1 keV.

Poder de frenado másico restringido

Siguiendo la notación de ICRU (1980). Cuando calculamos la dosis en un pequeño volumen o en un espesor delgado nos encontramos que los rayos δ tienen suficiente rango para escapar de este volumen fiducial y no depositan localmente toda su energía cinética. Si usamos el poder de frenado por colisiones (ionización+excitación) global estaremos sobreestimando la dosis local. Esto tiene especial relevancia en microdosimetría y en radiobiología. También es muy importante en los efectos por interacción individual (Single Event Upset) sobre componentes de microelectrónica digital.

Definimos el poder de frenado másico restringido como aquella fracción del poder de frenado másico total por colisiones que provoca la transferencia a un electrón de una energía cinética menor que un cierto valor de corte T_{cut} que se suele denominar Δ

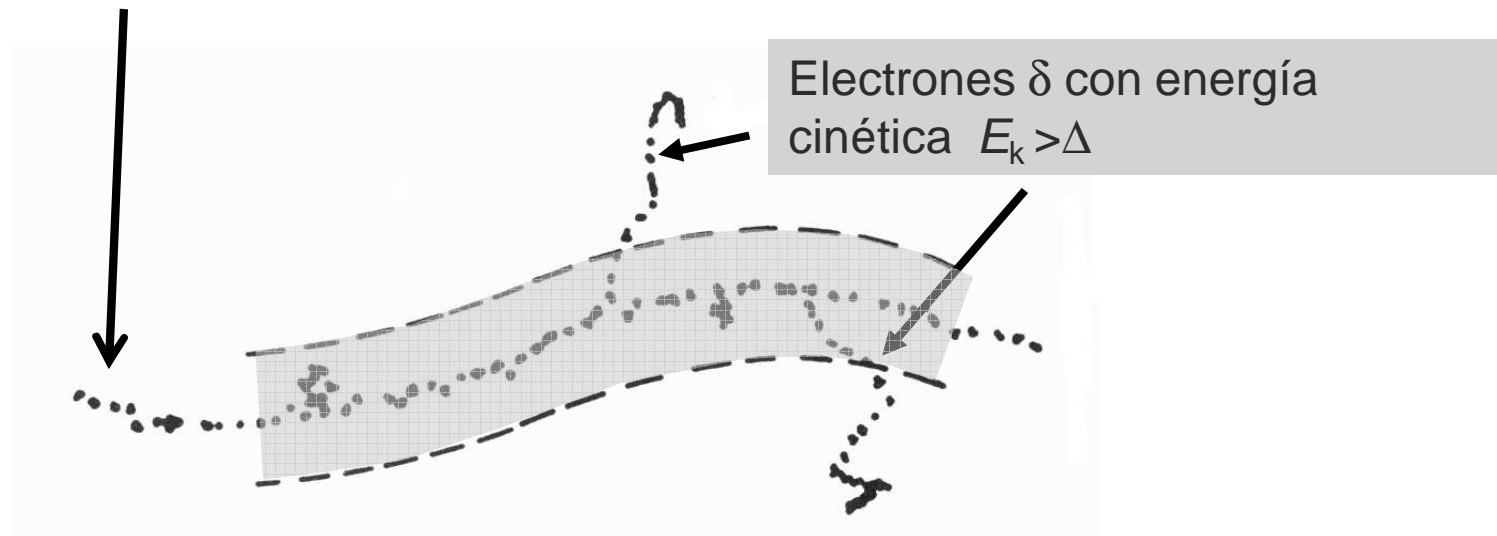


$$\left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{col} = \left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{T < \Delta} + \left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{T \geq \Delta}$$

En la gráfica una colisión "hard" provoca la aparición de un electrón con una fracción energía grande respecto a la energía del electrón primario. El electrón secundario δ recorre una distancia macroscópica antes de frenarse.

Poder de frenado másico restringido

Trayectoria de un electrón:



En la práctica la transferencia lineal restringida equivale a generar un tubo cilíndrico alrededor de la trayectoria del electrón de modo que los electrones secundarios (δ) incluidos puedan tener una energía cinética inicial máxima Δ .

Los electrones δ con energía inicial $E_k > \Delta$ se excluyen.

Poder de frenado másico restringido

Por supuesto el poder de frenado másico restringido tiende al poder de frenado másico total cuando relajamos la energía de corte y la acercamos al valor de Tmax.

$$\left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{T < \Delta} \xrightarrow{\Delta \approx T_{\max}} \left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{col}$$

Para partículas cargadas pesadas, ya hemos visto que la expresión del poder de frenado másico restringido es

$$\left[-\frac{dE}{\rho dx} \right]_{T < \Delta} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \Delta}{I^2} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{\Delta}{T_{\max}} \right) - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

Para electrones y positrones se puede escribir como (siendo E la energía cinética de la partícula primaria) (recordemos que Tmax es E/2 para e- y E para e+)

$$\left[-\frac{dE}{\rho dx} \right]_{T < \Delta} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\ln \left(\frac{(m_e c^2)^2 \tau^2 (\tau + 2)}{2I^2} \right) - F^\pm(\tau, \eta) - \delta - \frac{2C}{Z} \right]$$

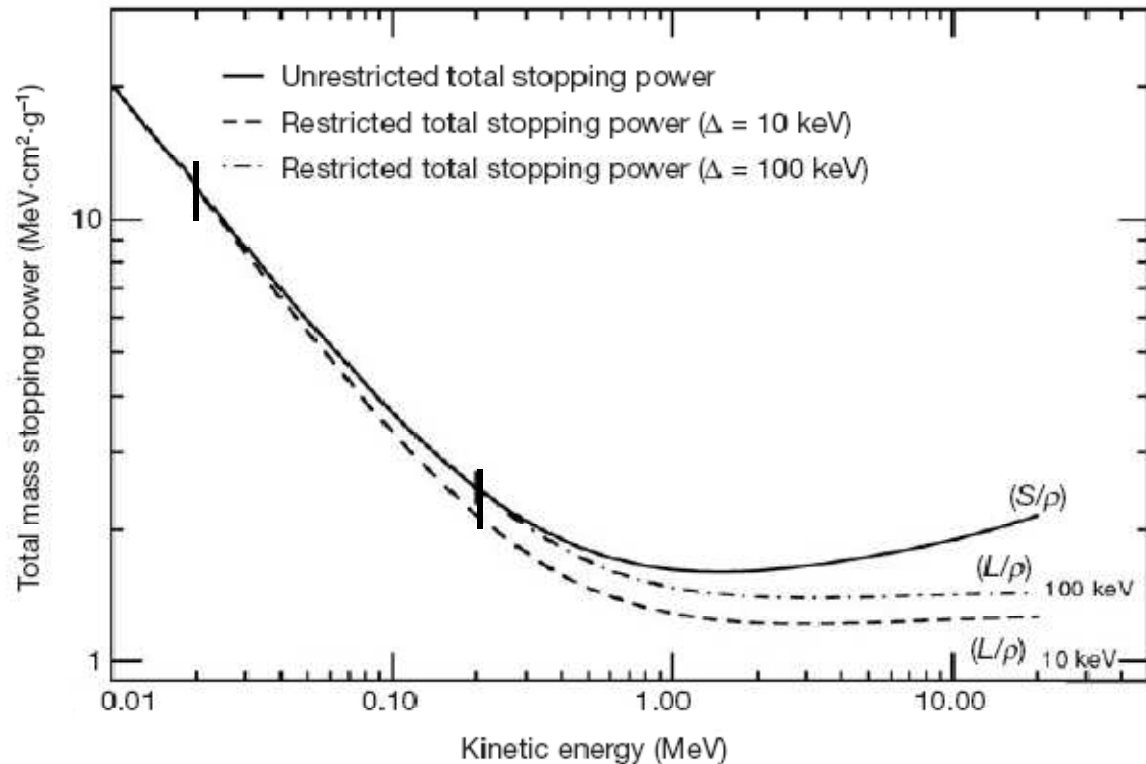
$$F^-(\tau, \eta) = -1 - \beta^2 + \ln[4(1-\eta)\eta] + \frac{1}{1-\eta} + (1-\beta^2) \left[\frac{\tau^2 \eta^2}{2} + (2\tau+1) \ln(1-\eta) \right]$$

$$\tau = \frac{E}{m_e c^2}; \quad \eta = \frac{\Delta}{E}; \quad \xi = \frac{1}{\tau+2}$$

$$F^+(\tau, \eta) = \ln(4\eta) - \beta^2 \left[1 + (2-\xi^2)\eta - (3+\xi^2) \frac{\xi\tau}{2} \eta^2 + (1+\xi\tau) \frac{\xi^2\tau^2}{3} \eta^3 - \frac{\xi^3\tau^3}{4} \eta^4 \right]$$

Poder de frenado másico

Poder de frenado másico total no restringido y restringido ($\Delta = 10$ keV y 100 keV) para carbono (ICRU Report No. 37)



Observamos que el poder de frenado másico no restringido y restringido empiezan a diverger al aumentar la energía. Evidentemente cuanto mayor sea el valor de Δ a mayor energía se aprecia la divergencia (líneas rojas).

Transferencia lineal de energía

La transferencia lineal de energía L_Δ es el poder de frenado lineal restringido asociado a la partícula en cuestión, de modo que

$$L_\Delta = \left[\frac{dE}{dx} \right]_{T < \Delta} = \rho \left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{T < \Delta}$$

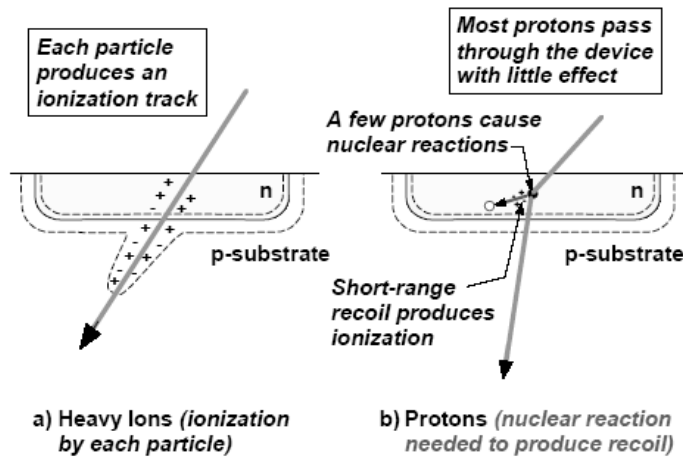
La transferencia lineal de energía se suele dar en keV por μm . Hay que dividir por un factor 10 en el caso de tener el poder de frenado másico calculado en $\text{MeV cm}^2/\text{g}$ junto con la densidad en g/cm^3 . Para un ión por tanto

$$L_\Delta = -\rho \frac{dE}{\rho dx} \Big|_{T < \Delta} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \rho \frac{Z}{A} z^2 \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \Delta}{I^2} \right) - \beta^2 \left(1 + \frac{\Delta}{T_{\max}} \right) - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

También se define la transferencia lineal de energía no restringida (de importancia en la protección radiológica) como

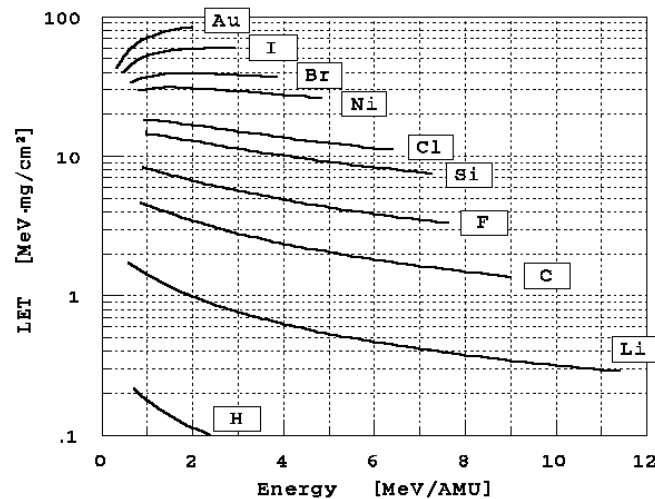
$$L_\infty = \lim_{\Delta \rightarrow T_{\max}} L_\Delta = \rho \left(\frac{dE}{\rho dx} \right)_{col}$$

Transferencia lineal de energía y microelectrónica

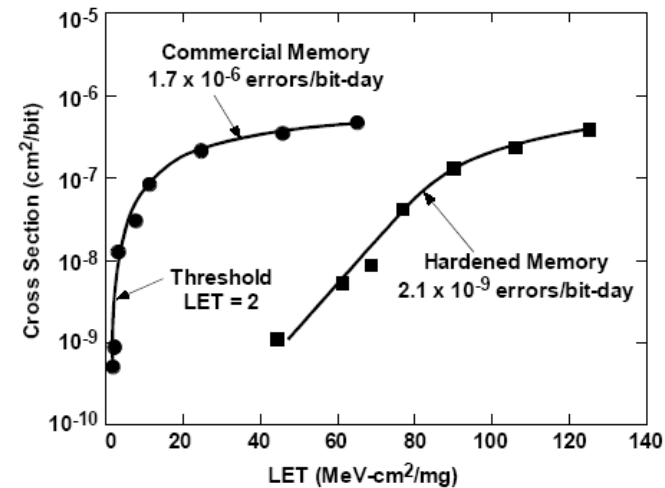


La transferencia lineal de energía está directamente vinculada a la producción de cambios de estado en microelectrónica digital (Single Event Upset) por la interacción de una única partícula.

El efecto se produce mediante iones o fragmentos nucleares cuyo LET es muy elevado

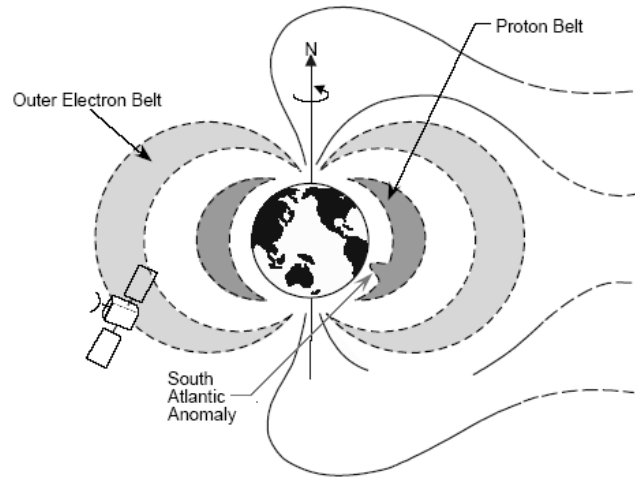


LET de diferentes iones en función de su energía por nucleón



Probabilidad de cambio de estado en función del LET

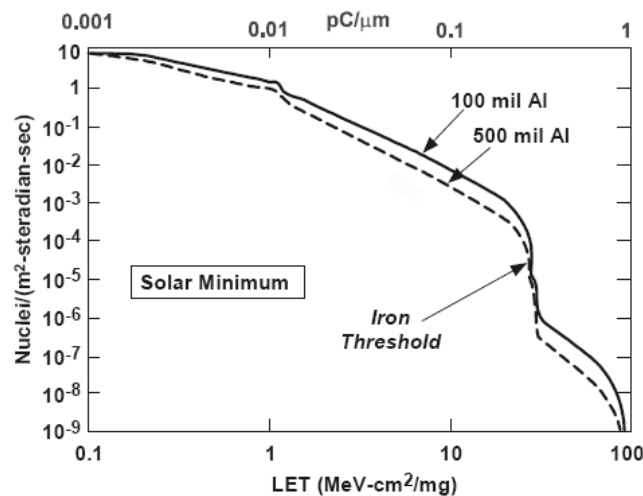
Transferencia lineal de energía y microelectrónica



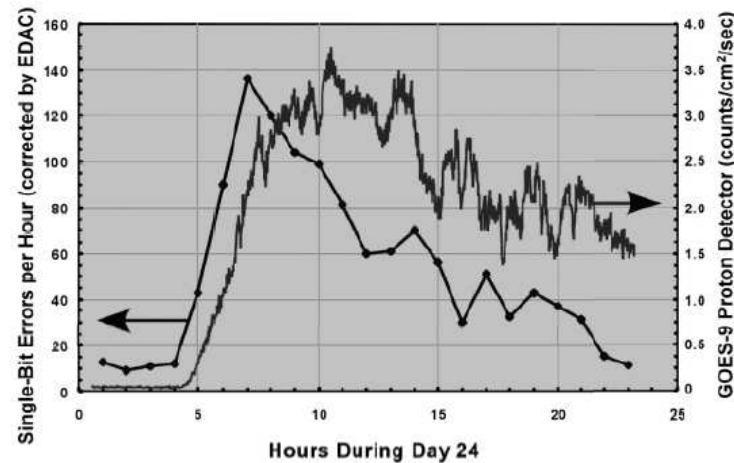
La transferencia lineal de energía se puede convertir en una carga crítica asociada al proceso si se conoce el espesor medio del material de la región activa del componente

$$E_{th} = LET_{th} \cdot \Delta x; \quad Q_{crit} = LET_{th} \cdot \Delta x \frac{e}{W_{eh}}$$

Esta carga crítica se puede relacionar con un cambio de potencial en el nodo de la celda de memoria a través de la capacidad por nodo.

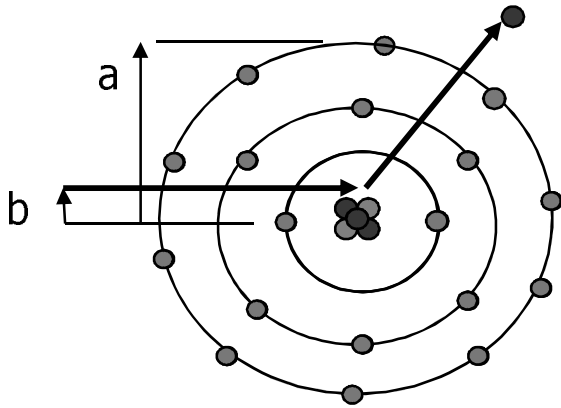


LET efectivo de partículas alrededor de la Tierra. Obsérvese en la parte superior la equivalencia a carga.



Tasa de SEU en una memoria de un satélite frente al flujo de protones durante una erupción solar.

Colisiones con el campo de Coulomb nuclear



Colisiones "hard" $a \gg b$

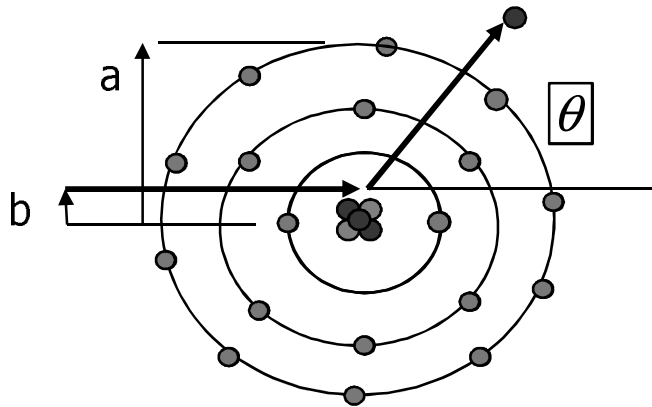
En estas colisiones el proyectil incide sobre el átomo con un parámetro de impacto tan pequeño que la interacción electromagnética tiene lugar en el campo de Coulomb que rodea al núcleo. La colisión en las energías de interés en dosimetría y radiología es elástica excepto en una pequeña fracción de sucesos (2 a 3%).

Este proceso radiativo es mucho más importante para electrones y positrones que para partículas cargadas pesadas. Debido a su mayor masa y carga, el proceso de frenado se debe fundamentalmente a las colisiones con el núcleo del átomo. Bethe y Heitler (1934) desarrollaron el modelo no-relativista de colisión donde el núcleo se supone fijo y el proyectil tiene masa M (ver Jackson "Classical Electrodynamics")

$$\left[\frac{dE}{dx} \right]_{rad} \propto \frac{Z^2 z^4}{M^2}$$

Esta dependencia implica que las pérdidas por bremsstrahlung son más importantes en materiales de alto Z y se comportan inversamente a la masa del proyectil para una velocidad dada.

Colisiones con el campo de Coulomb nuclear



La mayor parte de las colisiones a energías no relativistas dan lugar a scattering elástico que se conoce como scattering Rutherford. Estas colisiones contribuyen al cambio de dirección de las partículas cargadas en el medio sin que éstas pierdan energía.

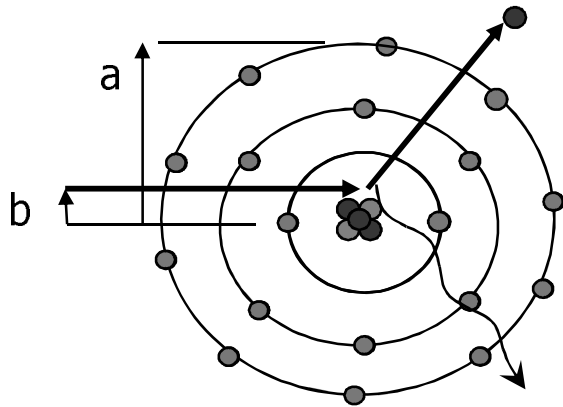
Para partículas cargadas pesadas la sección eficaz diferencial de scattering Rutherford (relativista) viene dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} = (1 - \beta^2) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{Ze^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

Donde E es la energía cinética de la partícula incidente. Esta sección eficaz tiene una marcada dependencia angular produciendo preferentemente dispersiones a bajo ángulo. La sección eficaz Rutherford anterior no se ajusta al caso de los electrones, así que Mc Kinley y Feschbach (Phys. Rev. 74, 1759) modificaron esta sección eficaz elástica para electrones

$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{McF}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth}} = 1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2) + \pi\beta \frac{Ze^2}{\hbar c} \sin(\theta/2)(1 - \sin(\theta/2))$$

Bremsstrahlung



Como resultado de la deceleración de los electrones en el campo eléctrico del núcleo. Las secciones eficaces aquí expuestas provienen de Koch y Motz (Reviews of Modern Physics 31, 4 (1959)). Esta emisión de fotones de bremsstrahlung depende del campo electrostático que ven los electrones en el núcleo. Consideremos E la energía total inicial del electrón incidente y sea $E-W$ la energía total del fotón dispersado. En el modelo de Thomas-Fermi se define la variable

$$\xi = \frac{100 m_e c^2 W}{E(E-W) Z^{1/3}}$$

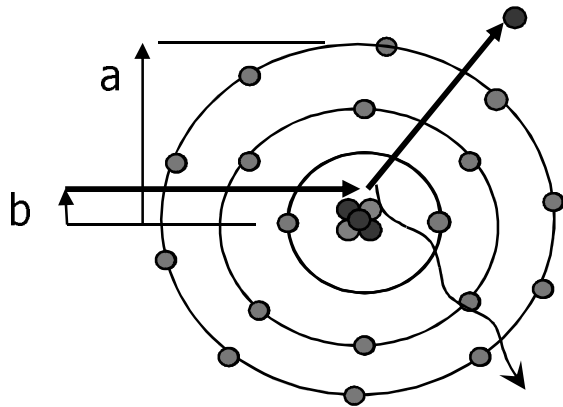
Esta variable está relacionada con el grado de apantallamiento nuclear por los electrones atómicos (screening), siendo cero para apantallamiento completo e infinito si no hay apantallamiento. El poder de frenado másico para este proceso viene dado por

$$E \gg \frac{m_e c^2 Z^{1/3}}{\alpha}; \quad \xi \approx 0$$

$$-\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{breem} = 4 \frac{N_A}{A} \alpha r_e^2 Z^2 E \left[\ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) + \frac{1}{18} - f(Z) \right]$$

Siendo alpha la constante de estructura fina $\sim 1/137$ y E la energía total del electrón

Bremsstrahlung



A bajas energías el poder de frenado másico se puede escribir mediante

$$E \ll \frac{m_e c^2 Z^{1/3}}{\alpha}; \quad \xi \gg 1$$

$$-\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{breem} = 4 \frac{N_A}{A} \alpha r_e^2 Z^2 E \left[\ln\left(\frac{2E}{m_e c^2}\right) - \frac{1}{3} - f(Z) \right]$$

La función $f(Z)$ es una corrección pequeña a la aproximación de Born. Esta función toma valores

$$f(Z) = 1.202 \left(\frac{Z}{137}\right)^2 \quad \text{para } Z \text{ bajo}; \quad f(Z) = 0.925 \left(\frac{Z}{137}\right)^2 \quad \text{para } Z \text{ alto}$$

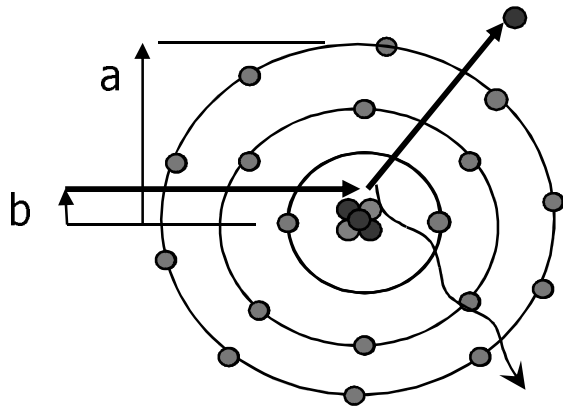
Si obviamos la dependencia logarítmica del poder de frenado para bremsstrahlung, podemos establecer que éste es proporcional a la energía del electrón incidente

$$\left(-\frac{dE}{\rho dx}\right)_{breem} \approx \frac{E}{X_0}$$

A X_0 se conoce como longitud de radiación y se define a veces como el espesor que deja al electrón con una energía $1/e$ de su energía inicial.

$$f(Z) = \left(\frac{Z}{137}\right)^2 \left[\left(1 + \left(\frac{Z}{137}\right)^2\right)^{-1} + 0.20206 - 0.0369 \left(\frac{Z}{137}\right)^2 + 0.0083 \left(\frac{Z}{137}\right)^4 - 0.002 \left(\frac{Z}{137}\right)^6 \right]$$

Bremsstrahlung



La longitud de radiación para diferentes materiales viene dada por la expresión

$$X_0 = \frac{716.4 A}{Z(Z+1) \ln\left(\frac{287}{\sqrt{Z}}\right)} \left(\frac{g}{cm^2}\right)$$

Si dividimos X_0 por la densidad de material encontraremos la longitud de radiación en el material. Por ejemplo en el caso de Si es de 9.4 cm. En el caso de una mezcla de elementos la longitud de radiación se obtiene mediante las fracciones en peso de cada elemento, esto es

$$\frac{1}{X_0} = \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{1}{X_i}$$

Es importante señalar las dependencias en el número atómico y másico del material de las pérdidas de energías producidas por colisión y por bremsstrahlung

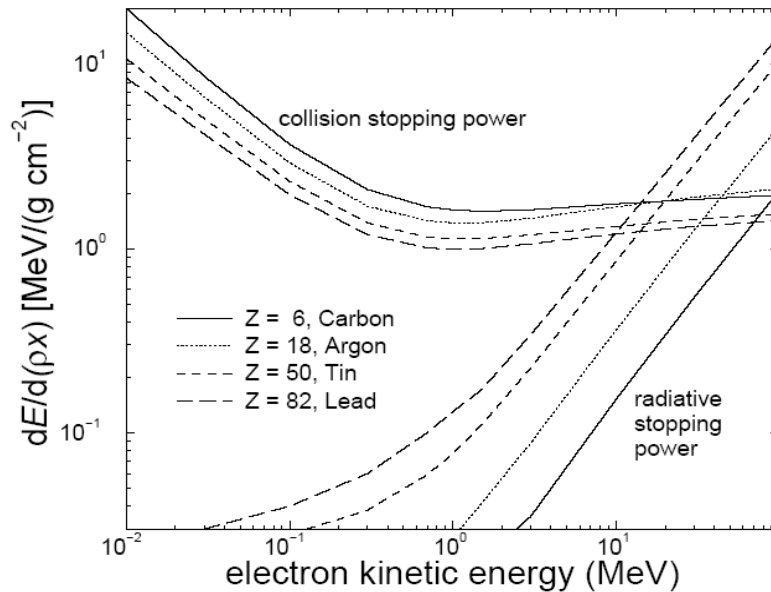
$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{col} \propto \frac{N_A Z}{A}$$

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{brem} \propto \frac{N_A Z^2}{A}$$



$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{brem} \propto Z$$

Bremsstrahlung



Las pérdidas de energía de los electrones se pueden dividir en pérdidas por colisiones y por radiación de frenado de la forma

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right) = \left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{col} + \left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{rad}$$

Las pérdidas por radiación son dominantes a alta energía mientras que las pérdidas por colisión son dominantes a baja energía. En la Figura se aprecia que ambos mecanismos de frenado se igualan a una energía que depende de Z.

Mientras que la dependencia en Z del poder de frenado por colisión es reducida, la dependencia del poder de frenado por radiación es muy marcada. Definimos la energía crítica como aquella para la cual las pérdidas por colisión y radiación se igualan

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{E_c,rad} = \left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{E_c,col} \Rightarrow E_c \approx \frac{610}{Z+1.24} (MeV)$$

Para Si esta energía crítica es de 40 MeV.

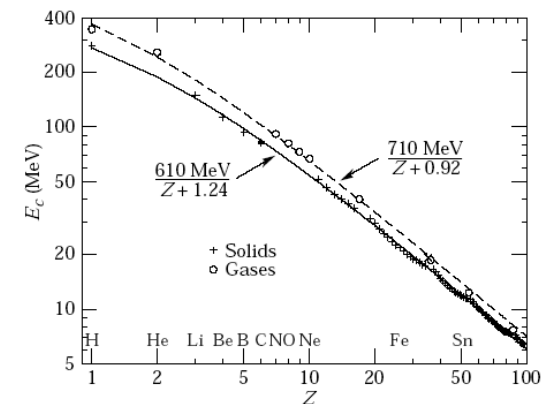


Figure 27.12: Electron critical energy for the chemical elements, using Rossi's definition [3]. The fits shown are for solids and liquids (solid line) and gases (dashed line). The rms deviation is 2.2% for the solids and 4.0% for the gases. (Computed with code supplied by A. Fassó.)

Bremsstrahlung

En el límite de alta energía es posible establecer aproximadamente el cociente entre las pérdidas de energía de radiación y colisión. Este cociente es proporcional a la energía cinética (E) del electrón

$$\frac{\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{rad}}{\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{col}} \approx \frac{E \cdot Z}{1600 m_e c^2}$$

La constante del denominador tiene una cierta incertidumbre (Apendice E del attix) e incluso una cierta dependencia logarítmica en la energía del electrón.

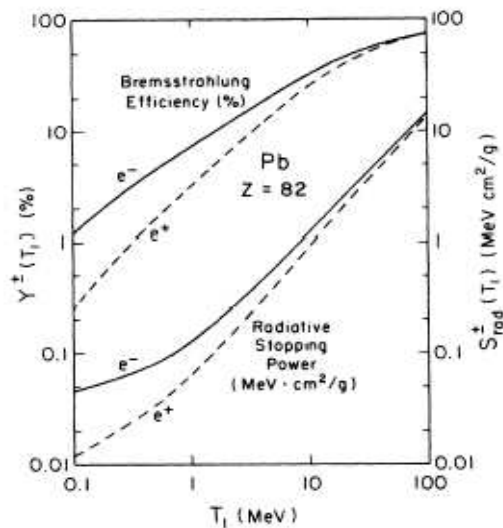


FIG. 6. Positron and electron differences in lead ($Z=82$), for the radiative stopping power, in $\text{MeV cm}^2/\text{g}$, and for the bremsstrahlung efficiency, in percent, as a function of the incident particle kinetic energy T_1 . Dashed curves are for positrons and solid curves for electrons. The + and - signs represent positron and electron cases, respectively.

Definimos la fracción emitida como radiación $y(T)$ para un electrón de energía cinética T como

$$y(T) = \frac{\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{rad}}{\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)}$$

Esta fracción depende de T aumentando con la energía cinética del electrón (ver gráfica)

Para un positrón hay que incluir la aniquilación en vuelo

Bremsstrahlung

Aparte de la definición de la fracción (instantánea) de energía radiada, tiene interés definir la fracción neta $Y(T_0)$ de energía radiada por un electrón (o positrón) cuya energía cinética inicial es T_0 hasta que se detiene en el medio material

$$y(T) = \frac{\left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_{rad}}{\left(\frac{dT}{\rho dx}\right)}$$

$$Y(T_0) = \bar{y}(T_0) = \frac{\int_0^{T_0} dT \left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_{rad} \left(\frac{dT}{\rho dx}\right)^{-1}}{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} dT y(T)$$

El valor medio de esta fracción de energía emitida como radiación es aquella constante g que usamos para relacionar el coeficiente másico de absorción de energía frente al coeficiente másico de transferencia de energía en el caso de fotones.

$$\mu_{tr} (1 - g) = \mu_{en}$$

$$g = \bar{Y} = \frac{\int_0^{T_{max}} dT Y(T) \left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{KN}^\gamma}{\int_0^{T_{max}} dT \left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{KN}^\gamma}$$

Donde en esta expresión la sección eficaz hace referencia a la sección eficaz de Compton y T_{max} es la máxima energía transferida por el fotón al electrón del medio.

Poder de frenado por radiación

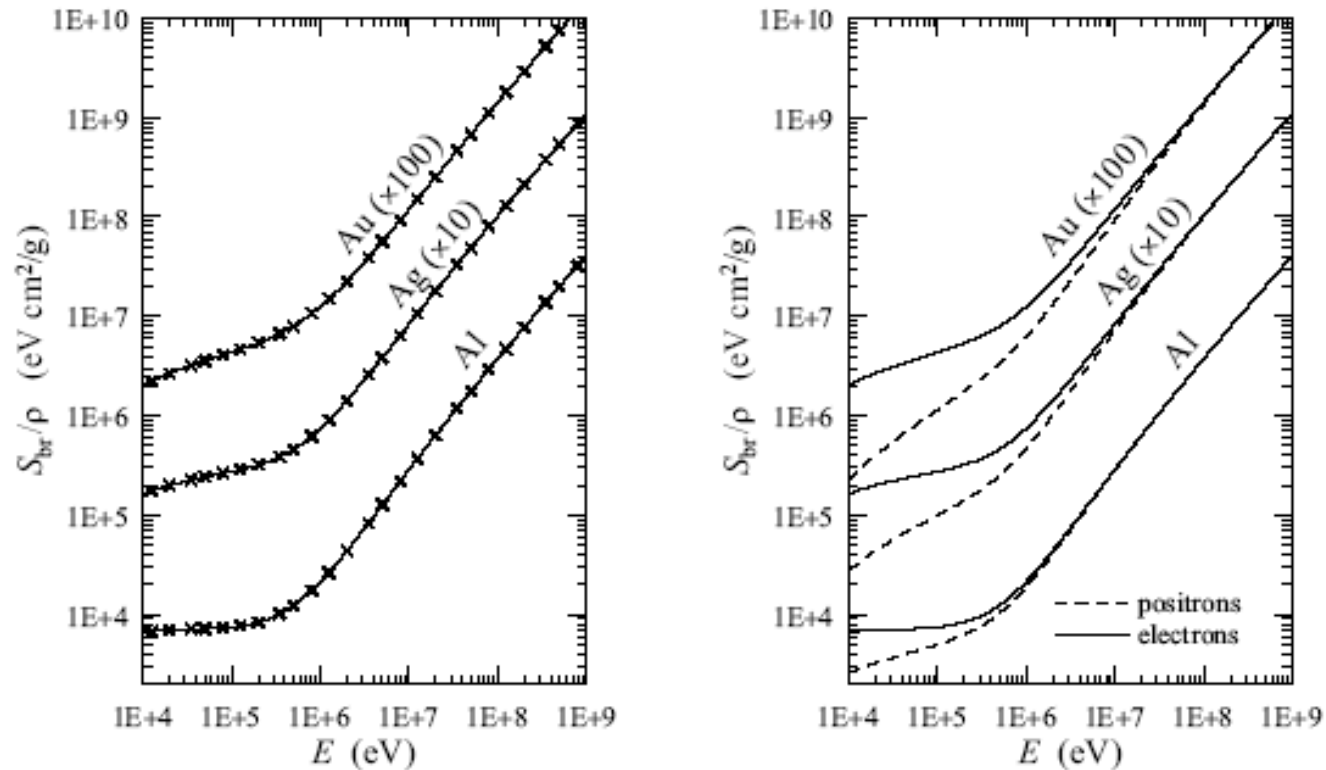


Figure 3.13: Radiative stopping power S_{br}/ρ for electrons and positrons in Al, Ag ($\times 10$) and Au ($\times 100$) as a function of the kinetic energy. Solid and dashed curves are results from the present model. Crosses are data from the ICRU37 report (1984) (also in Berger and Seltzer, 1982).

Poderes de frenado por radiación en metales (Au, Ag, Al) (Penelope) como función de la energía cinética de los electrones y positrones.

Scattering múltiple

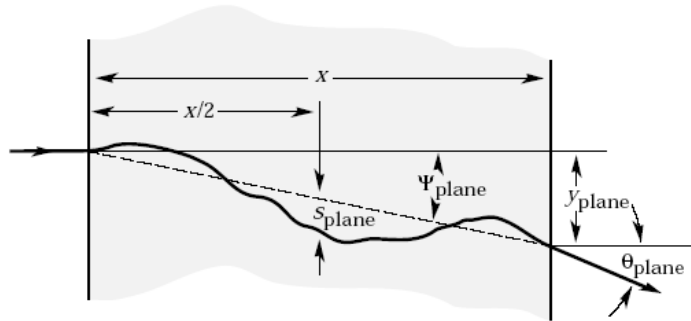


Figure 27.8: Quantities used to describe multiple Coulomb scattering. The particle is incident in the plane of the figure.

Las colisiones de Coulomb en el medio material desvían a las partículas cargadas de su dirección original de movimiento. Aunque los ángulos de dispersión son pequeños el gran número de colisiones contribuye a que este efecto sea apreciable.

Este proceso de dispersión se conoce como scattering múltiple y fue modelizado por Molière. Caracterizamos este proceso por una dependencia gaussiana con un ángulo de semiapertura dado por (para un proyectil de carga z)

$$\theta_0 = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} z \sqrt{\frac{x \rho}{X_0}} \left[1 + 0.038 \ln \left(\frac{x \rho}{X_0} \right) \right]$$

Siendo βc la velocidad de la partícula, p su momento, ρx el espesor másico del material a atravesar. Evidentemente para un electrón $z=1$. X_0 es la longitud de radiación del material en cuestión. La dirección de salida forma un ángulo en el espacio con la dirección incidente dada por θ_{space} mientras que si lo proyectamos en un plano este ángulo será θ_{plane}

Scattering múltiple

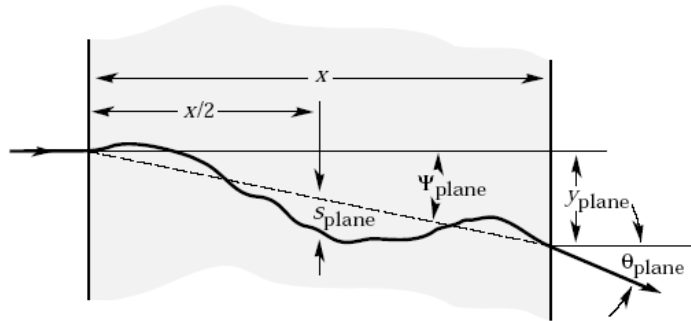


Figure 27.8: Quantities used to describe multiple Coulomb scattering. The particle is incident in the plane of the figure.

La distribución de direcciones de salida de la partícula después de un espesor x será en el espacio

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi \theta_0^2} \exp\left(-\frac{\theta_{space}^2}{2\theta_0^2}\right)$$

Si lo expresamos proyectado en un plano la distribución de ángulos será

$$\frac{dN}{d\theta_{plane}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \theta_0} \exp\left(-\frac{\theta_{plane}^2}{2\theta_0^2}\right)$$

Hay que recordar que aproximadamente se cumple que $\theta_{space}^2 \approx \theta_{plane,x}^2 + \theta_{plane,y}^2$

En muchos problemas puede ser interesante conocer la desviación del punto de emergencia de la partícula respecto al plano que contiene su trayectoria inicial esta desviación se puede escribir

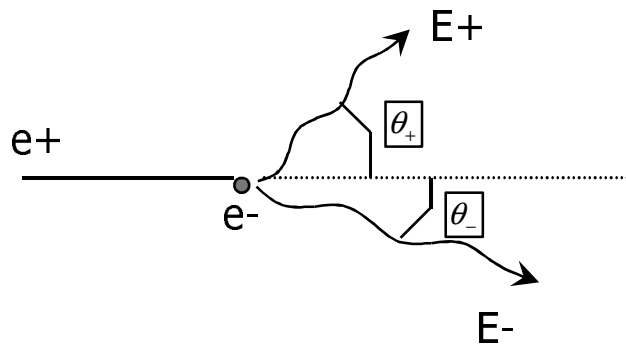
$$y_{plane} = \frac{1}{\sqrt{3}} x \theta_0$$

O la longitud de la cuerda que une el punto de impacto y de salida

$$S_{plane} = \frac{1}{4\sqrt{3}} x \theta_0$$

Aniquilación positrón-electrón

Un positrón se aniquila con un electrón del medio material para producir dos fotones de alta energía. Consideremos la aniquilación en vuelo del positrón con un electrón inicialmente en reposo en el medio material



En el caso de aniquilación en vuelo los dos fotones pueden tener energía diferente E_+ , E_- que (siendo E la energía cinética del positrón) verificará

$$E + 2m_e c^2 = E_+ + E_-$$

Cada suceso de aniquilación queda completamente caracterizado cuando establecemos el reparto de la energía entre los dos fotones de aniquilación. Se suele usar la variable

$$\zeta = \frac{E_-}{E + 2m_e c^2}$$

Mediante la conservación de energía y momento obtenemos los ángulos polares de emisión de ambos fotones en el laboratorio

$$\cos(\theta_-) = \frac{\gamma + 1 - \frac{1}{\zeta}}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}; \quad \cos(\theta_+) = \frac{\gamma + 1 - \frac{1}{1 - \zeta}}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

Aniquilación positrón-electrón

La sección eficaz diferencial de aniquilación por electrón fue calculada en el centro de masas por Heitler (1934). Si la transformamos al sistema de referencia donde el electrón está en reposo y la integramos se obtiene la sección eficaz total (por electrón del medio)

$$\sigma_{ann} = \frac{\pi r_e^2}{(\gamma+1)(\gamma^2-1)} \left\{ (\gamma^2 + 4\gamma + 1) \ln[\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}] - (3 + \gamma)\sqrt{\gamma^2 - 1} \right\}$$

Donde r_e es el radio clásico del electrón. Esta sección eficaz por electrón se puede transformar en el recorrido libre medio de aniquilación teniendo en cuenta la densidad electrónica del medio.

$$\frac{1}{\lambda_{ann}} = \frac{N_A}{A} \rho Z \sigma_{ann} = \frac{N_A}{A} \rho Z \frac{\pi r_e^2}{(\gamma+1)(\gamma^2-1)} \left\{ (\gamma^2 + 4\gamma + 1) \ln[\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}] - (3 + \gamma)\sqrt{\gamma^2 - 1} \right\}$$

Donde si expresamos la densidad en g/cm^3 y r_e en cm , obtendremos el recorrido libre medio del positrón en cm .

Aniquilación positrón-electrón

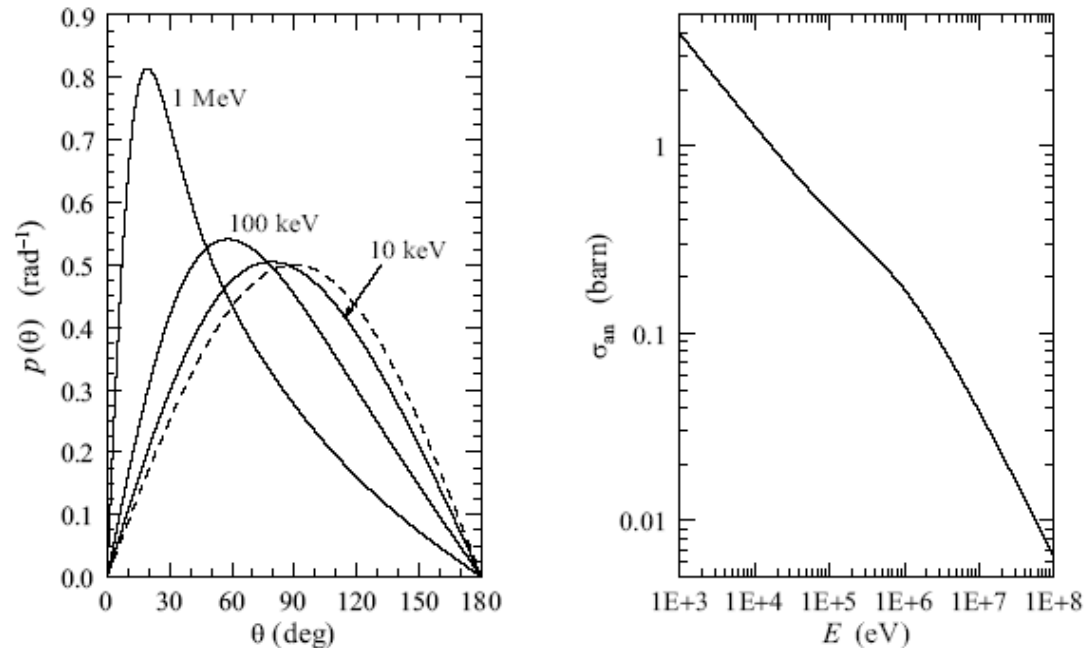
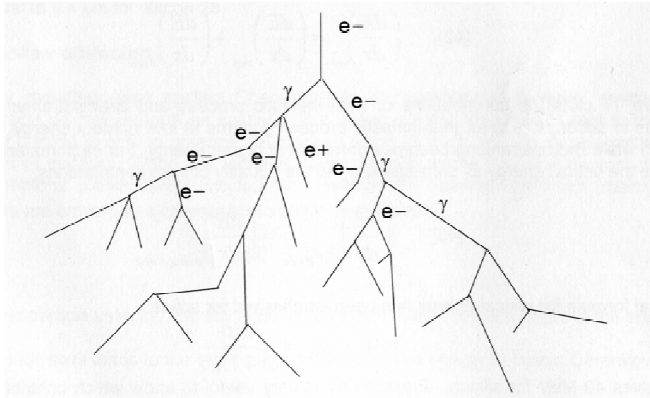


Figure 3.16: Left: angular distributions of photons produced by annihilation in flight of positrons with the indicated kinetic energies. The dashed line represents the isotropic distribution. Right: Annihilation cross section per target electron as a function of the kinetic energy of the positron.

La sección eficaz de aniquilación decrece con la energía cinética del positrón considerablemente. Así un positrón tiende a aniquilarse cuando ha sido frenado en el medio de modo sustancial. La distribución de los ángulos de emisión de los fotones a baja energía tienen un máximo a 90°. Sin embargo a alta energía la aniquilación en vuelo produce fotones orientados hacia delante (a 1 MeV el máximo está entorno a 20°).

Monte Carlo

La forma detallada (suceso a suceso) de simular los procesos de transporte de la radiación en la materia mediante métodos numéricos se suele denominar método Monte Carlo



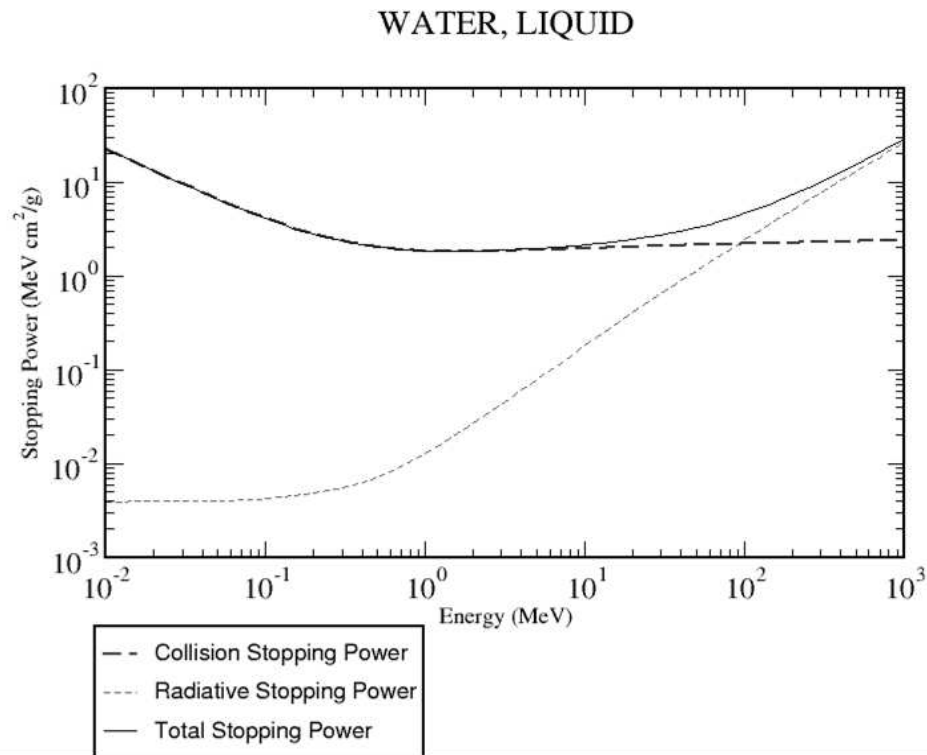
Lista de los códigos Monte Carlo más comunes y los algoritmos que usan

| Code\Process | Photons | | | | Electrons and positrons | | |
|-----------------|--|------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---|---------------------------------|------------------|
| | Rayleigh | Compton | Photo-electric | Pair production | inelastic | Bremss. | Annihil. |
| EGS4 | $F(q, Z)$ from Hubbell and Øverbø (1979) | Klein-Nishina | Sauter | Motz (1969) | Møller (1932) And Bhabba (1936) | Coulomb Corrected Bethe-Heitler | Annihil. at rest |
| ETRAN | $F(q, Z)$ from Hubbell And Øverbø (1979) | Klein-Nishina And Hubbell | Sauter-Fischer | Bethe-Heitler And Bethe-Ashkin (1953) | Møller | Seltzer (1988) | Annihil. at rest |
| MCNP4 | Thomson scattering | Electron binding effects | Fluo. And Auger. | Triplet: No | Møller | Berger and Seltzer (1970) | Annihil. at rest |
| PENELOPE | $F(q, Z)$ from Hubbell and Øverbø (1975) | Impulse approx. + Electron binding | Fluo. and Auger and Sauter | Bethe-Heitler | Møller (1932) And Bhabba (1936) And Strength approach | Bethe and Heitler (1934) | Annihil. at rest |
| GEANT4 | $F(q, Z)$ from Hubbell and Øverbø (1979) | Klein-Nishina And Hubbell | Fluo. and Auger and Sauter | yes | Møller (1932) And Bhabba (1936) | yes | Annihil. at rest |

Table 5 – Monte Carlo codes for photons, electrons and positrons [21]. Each codes uses a different combination of models.

Poder de frenado total

El poder de frenado total de una partícula cargada en un medio material es la suma del poder de frenado por colisión (ionización+excitación) y el poder de frenado por radiación.



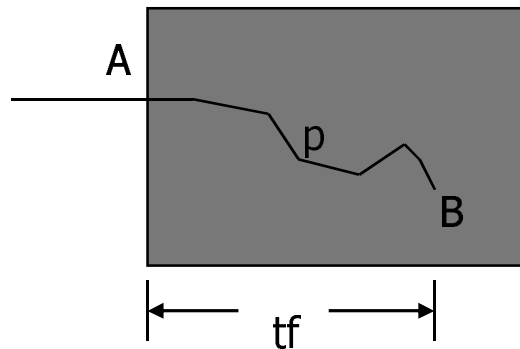
$$\left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{tot} = \left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{col} + \left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{rad}$$

Poder de frenado total, por colisión y radiación para electrones en agua desde 0.01 MeV hasta 1000 MeV.

<http://www.physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ESTAR.html>

Alcance

Definimos como alcance R de una partícula cargada de una energía cinética dada T en un medio material como el valor esperado de la longitud de su trayectoria en dicho medio hasta que la partícula se detiene (alcanza la energía térmica del medio).



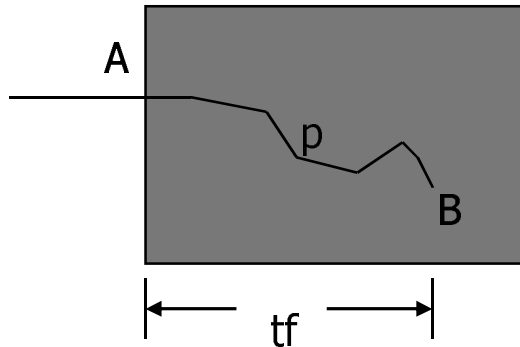
Debido a que la trayectoria de la partícula se desvía de su dirección de incidencia, la profundidad máxima que alcanza t_f en el medio no coincide con su alcance R .

Definimos como alcance proyectado $\langle t \rangle$ de una partícula cargada de una energía cinética T dada en un medio material, como el valor esperado (valor medio) de las profundidades máximas de penetración t_f de dicha partícula. Estas profundidades t_f se miden en la dirección inicial de incidencia de la partícula cargada.

El alcance se suele expresar en unidades de espesor másico (i.e. g/cm^2). Se excluye de modo habitual las interacciones de tipo nuclear en la definición de alcance R .

Alcance CSDA

Aunque el alcance R así definido puede ser establecido experimentalmente, se suele definir el alcance CSDA (Continuous Slowing Down Approximation) a partir del poder de frenado másico que hemos establecido previamente (Bethe-Bloch). Como conocemos la pérdida de energía por unidad de espesor másico podemos definir



$$R_{CSDA} = \int_0^{T_0} \frac{dT}{\left(\frac{dT}{\rho dx} \right)}$$

Siendo T_0 la energía cinética inicial de la partícula. El poder de frenado del denominador es el total.

De nuevo R_{CSDA} se suele tabular en g/cm^2 . Para muchas situaciones el rango (alcance) R definido anteriormente y el rango CSDA pueden ser considerados como idénticos. Sin embargo, las pérdidas de energía reales tienen lugar en colisiones discretas y discontinuas, lo que hace que pueda haber ligeras diferencias entre el alcance real y el CSDA. Estas diferencias suelen ser pequeñas para partículas cargadas pesadas. Por ejemplo para protones son menores del 0.2%. Para electrones la diferencia puede ser considerablemente mayor.

Alcance electrones en agua.

| Energy E_0 | S_{ion} | S_{rad} MeV cm ² /g | S_{tot} | Range R g/cm ² (eq. 6-28) |
|-----------------|-----------|-------------------------------------|-----------|--|
| keV | | | | |
| 10 | 22.56 | .0039 | 22.56 | .0003 |
| 20 | 13.17 | .0040 | 13.18 | .0009 |
| 40 | 7.777 | .0040 | 7.781 | .0029 |
| 80 | 4.757 | .0041 | 4.762 | .0098 |
| 100 | 4.115 | .0042 | 4.120 | .0143 |
| 200 | 2.793 | .0048 | 2.798 | .0447 |
| 400 | 2.148 | .0063 | 2.154 | .1282 |
| 800 | 1.886 | .0104 | 1.897 | .3294 |
| MeV | | | | |
| 1 | 1.852 | .0128 | 1.865 | .4359 |
| 2 | 1.839 | .0268 | 1.866 | .9720 |
| 4 | 1.896 | .0608 | 1.957 | 2.019 |
| 8 | 1.970 | .1398 | 2.110 | 3.984 |
| 10 | 1.994 | .1823 | 2.176 | 4.917 |
| 20 | 2.063 | .4097 | 2.472 | 9.237 |
| 40 | 2.125 | .8962 | 3.021 | 16.55 |
| 80 | 2.184 | 1.914 | 4.099 | 27.88 |
| 100 | 2.204 | 2.434 | 4.637 | 32.47 |

Alcance CSDA de electrones en agua, última columna de la derecha. Obsérvese que en la región de radioterapia de fotones (MeV) el alcance es del rango de cm.

Alcance CSDA. Partículas cargadas pesadas

El alcance R CSDA (Continuous Slowing Down Approximation) se suele calcular para protones en el caso de las partículas cargadas pesadas y se obtiene para partículas de diferente carga/masa a través del correspondiente escalado. Hemos de tener en cuenta los siguientes aspectos para partículas cargadas pesadas:

- Las energías cinéticas de partículas con la misma velocidad son proporcionales a su masa
- Todas las partículas cargadas con carga unidad (en unidades de la carga del electrón) tienen el mismo poder de frenado
- Por tanto el rango de una partícula cargada pesada (con una carga unidad) es proporcional a su masa en reposo

$$T = Mc^2(\gamma - 1)$$

$$\frac{dT}{\rho dx} = z^2 L(\beta)$$

$$\frac{dT}{\rho dx} = Mc^2 \frac{d(\gamma - 1)}{\rho dx} = z^2 L(\beta)$$

Alcance CSDA. Partículas cargadas pesadas

Para garantizar que las velocidades de ambas partículas son iguales, la relación entre la energía cinética T de la partícula de masa M y la energía cinética del protón T_p será

$$\frac{T_p}{T} = \frac{M_p c^2 (\gamma_p - 1)}{M c^2 (\gamma - 1)} = \frac{M_p}{M}$$

Por lo tanto a iguales velocidades tendremos que

$$T_p = \frac{M_p}{M} T$$

La definición del rango CSDA viene dada por

$$R_{CSDA}(M, z, T_0) = \int_0^{T_0} \frac{dT}{\left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_{M,z}} = \int_0^{\frac{M_p T_0}{M}} \frac{M}{M_p} \frac{dT_p}{z^2 \left(\frac{dT_p}{\rho dx}\right)_{M_p}} = \frac{M}{z^2 M_p} \int_0^{\frac{M_p T_0}{M}} \frac{dT_p}{\left(\frac{dT_p}{\rho dx}\right)_{M_p}} = \frac{M}{z^2 M_p} R_{CSDA}\left(M_p, 1, \frac{M_p}{M} T_0\right)$$

De donde podemos obtener el poder de frenado másico de una partícula pesada de masa M y carga z a partir del poder de frenado másico del protón en el mismo medio.

Alcance CSDA. Partículas cargadas pesadas

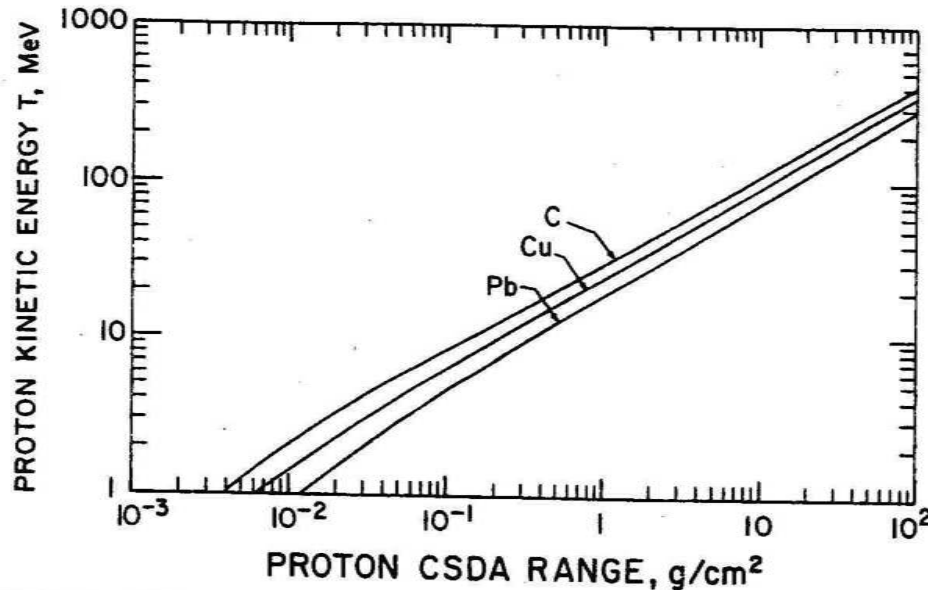


FIGURE 8.8. CSDA range (abscissa) vs. proton kinetic energy (ordinate) for C (graphite), Cu, and Pb. (From data of Bichsel, 1968).

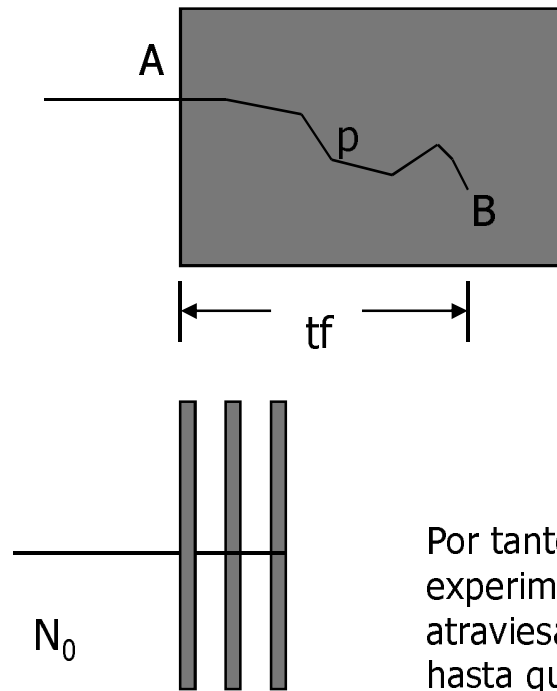
Alcance para protones en C, Cu y Pb. Obsérvese que el comportamiento a altas energías es aproximadamente lineal con $T_0^{1.77}$ con diferentes factores entre los diferentes medios materiales (Z).

$$R_{CSDA}(C) = \frac{T_0^{1.77}}{415} + \frac{1}{670}$$

T en MeV, R en g/cm^2

Puesto que el poder de frenado se comporta como Z/A , el rango resulta ser mayor al aumentar Z , de modo que en Pb a la misma energía es del orden de tres veces mayor que en Carbono.

Alcance proyectado



El alcance proyectado lo definimos como el valor esperado de la profundidad máxima de penetración t_f en el medio en la dirección de incidencia. Si consideramos un haz de partículas estrecho que incide sobre una lámina de espesor t , las partículas que no atraviesen dicha lámina serán aquellas que tengan $t_f < t$. Si consideramos una lámina de espesor infinitesimal dt a una profundidad total t

$$\left| \frac{dN(t)}{N_0} \right| = \text{prob}(t < t_f < t + dt)$$

Por tanto podemos calcular el valor del alcance proyectado mediante un experimento de transmisión donde midamos el número de partículas que atraviesan un cierto espesor de material aumentándolo progresivamente hasta que no exista ninguna partícula transmitida.

$$\langle t \rangle = \sum_{t=0}^{\infty} t \text{prob}(t < t_f < t + dt) = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} |dN(t)| t = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} dt t \left| \frac{dN(t)}{dt} \right|$$

La función $1/N_0 * dN/dt$ representa la densidad de probabilidad de máximas profundidades de penetración t_f .

Alcance

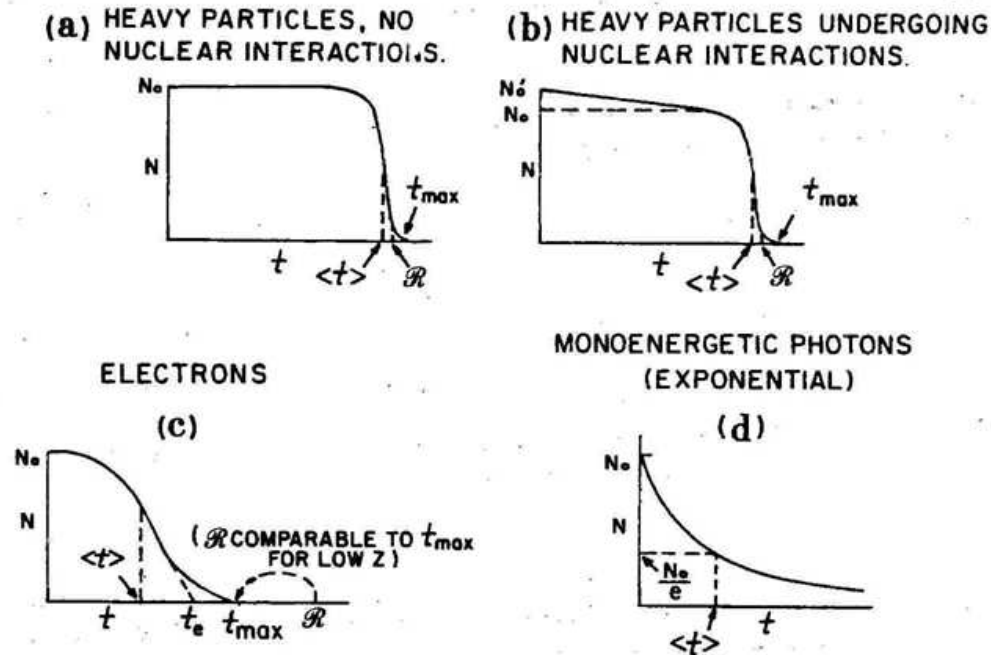


FIGURE 8.9. Numbers of monoenergetic charged particles or photons penetrating through a slab thickness t of absorbing medium. Scattered photons are assumed to be ignored in d . $\langle t \rangle$ is the projected range, t_e is the extrapolated penetration depth, t_{max} is the maximum penetration depth, and R is the range ($\cong R_{CSDA}$).

El alcance máximo t_{max} se define como el mínimo espesor másico que no es atravesado por ninguna partícula. (O el alcance de la partícula más penetrante)

En la figura los tres rangos definidos: R_{CSDA} , $\langle t \rangle$ y t_{max} . Obsérvese que en general se cumple que

$$\langle t \rangle < t_{max}$$

Para partículas pesadas

$$R_{CSDA} \approx t_{max}$$

En general hasta que el espesor másico del material se acerca al rango proyectado $\langle t \rangle$, no se observa ningun decremento del número de partículas. El rango R (valor medio de la longitud de trayectoria) para protones no suele ser mayor de un 3% que el rango proyectado $\langle t \rangle$ y es muy cercano a t_{max} . El rango R para iones suele estar cerca de t_{max} , en el caso de electrones $R > t_{max}$ en general.

Alcance. Electrones

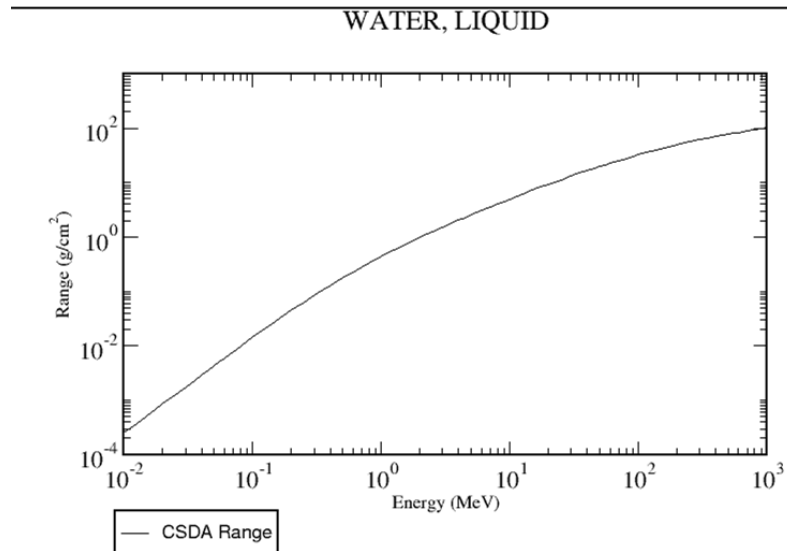


TABLE 8.4. Comparison of Maximum Penetration Depth t_{\max} with CSDA Range^a for Electrons of Energy T_0 .

| T_0 (MeV) | Z | t_{\max} (mg/cm ²) | R_{CSDA} (mg/cm ²) | t_{\max}/R_{CSDA} |
|----------------|---------|-------------------------------------|--|----------------------------|
| .05 | 13 (Al) | 5.05 | 5.71 | .88 |
| .10 | 13 (Al) | 15.44 | 18.64 | .83 |
| .15 | 13 (Al) | 31.0 | 36.4 | .85 |
| .05 | 29 (Cu) | 5.42 | 6.90 | .79 |
| .10 | 29 (Cu) | 17.1 | 22.1 | .77 |
| .15 | 29 (Cu) | 34.0 | 42.8 | .79 |
| .05 | 47 (Ag) | 5.04 | 7.99 | .63 |
| .10 | 47 (Ag) | 15.6 | 25.2 | .62 |
| .15 | 47 (Ag) | 30.2 | 48.4 | .62 |
| .05 | 79 (Au) | 4.73 | 9.88 | .48 |
| .10 | 79 (Au) | 14.3 | 30.3 | .47 |
| .15 | 79 (Au) | 27.6 | 57.5 | .48 |

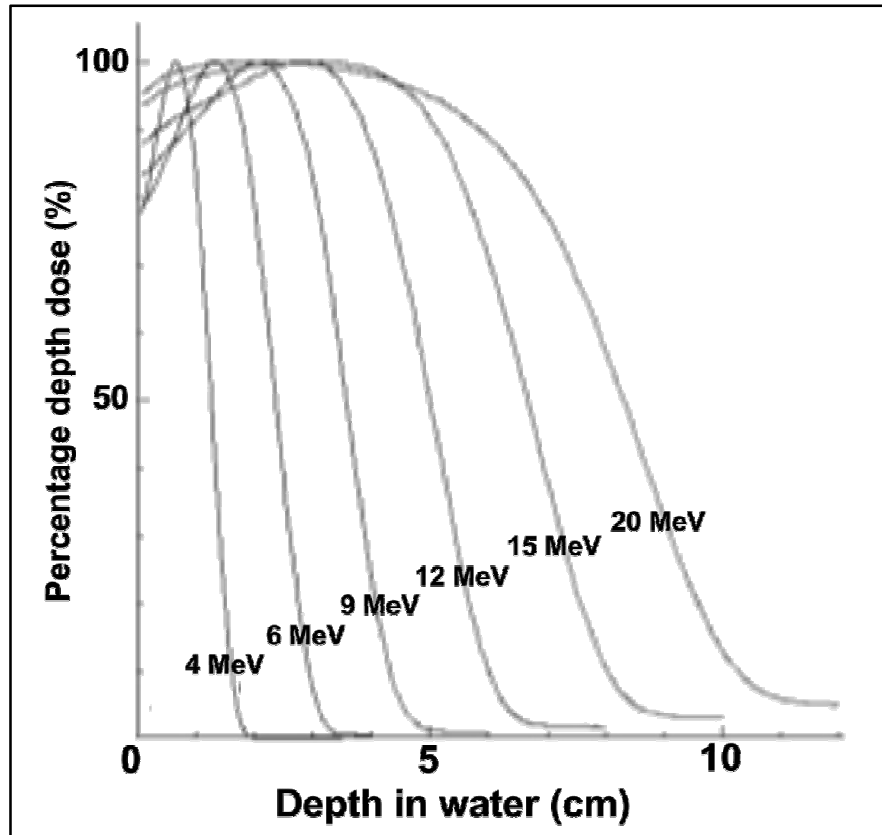
^a After Bichsel (1968), based on experimental results of Gubernator and Flammersfeld, and CSDA ranges of Berger and Seltzer (1964). Reproduced with permission from H. Bichsel and Academic Press, Inc.

En el caso de los electrones es especialmente llamativa la suave forma de S de su penetración en el material. Es importante tener en cuenta que los electrones (y las partículas cargadas en mucha menor medida) sufren:

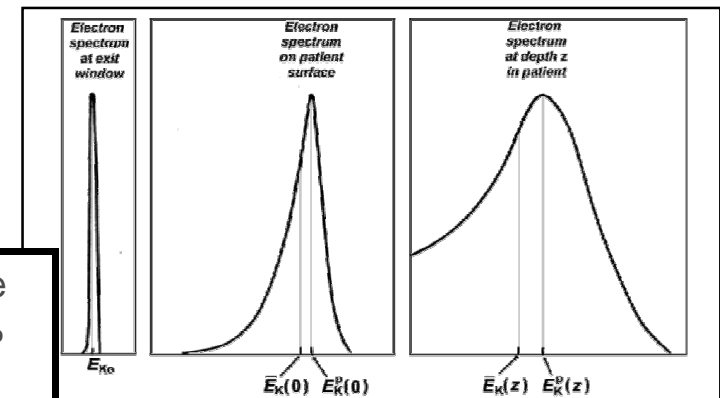
- Scattering múltiple que produce trayectorias tortuosas haciendo significativamente menor el valor de la profundidad de penetración respecto al alcance (longitud de trayectoria).
- Dispersión de alcance, produciendo variaciones en el alcance como consecuencia de las variaciones estocásticas en la tasa de pérdida de energía en el medio.
- Dispersión de energía (energy straggling) relacionada con la anterior, produce que después de penetrar un espesor t , un haz monoenergético deja de serlo.

Todos estos efectos en electrones a alta energía llevan a tener $t_{\max} \sim 2 \langle t \rangle$. Mientras que para bajo Z t_{\max} es comparable al rango, el cociente a alto Z es $t_{\max}/R \sim 0.5$. Sin embargo $\langle t \rangle$ y t_{\max} dependen poco de Z.

Alcance. Electrones



En el caso de electrones la dosis superficial crece con la energía del haz. En terapia puede considerarse que el haz es casi monoenergético al abandonar el cabezal del LINAC. La contaminación de frenado crece con la energía del haz.

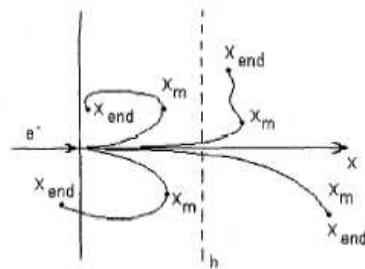
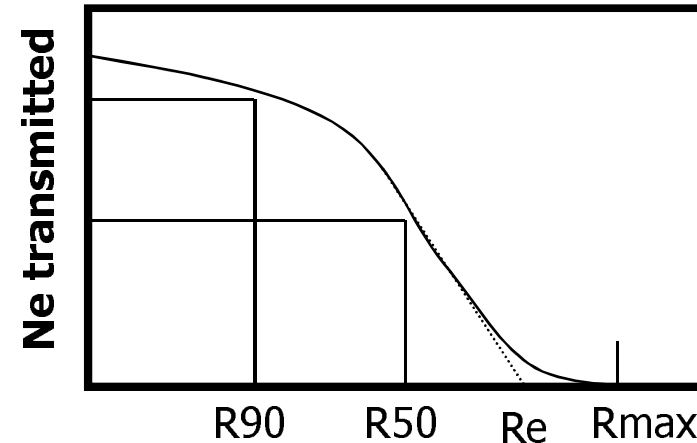


| Energy (MeV) | R ₉₀ (cm) | R ₈₀ (cm) | R ₅₀ (cm) | R _p (cm) | (MeV) | Surface dose % |
|--------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|-------|----------------|
| 6 | 1.7 | 1.8 | 2.2 | 2.9 | 5.6 | 81 |
| 8 | 2.4 | 2.6 | 3.0 | 4.0 | 7.2 | 83 |
| 10 | 3.1 | 3.3 | 3.9 | 4.8 | 9.2 | 86 |
| 12 | 3.7 | 4.1 | 4.8 | 6.0 | 11.3 | 90 |
| 15 | 4.7 | 5.2 | 6.1 | 7.5 | 14.0 | 92 |
| 18 | 5.5 | 5.9 | 7.3 | 9.1 | 17.4 | 96 |

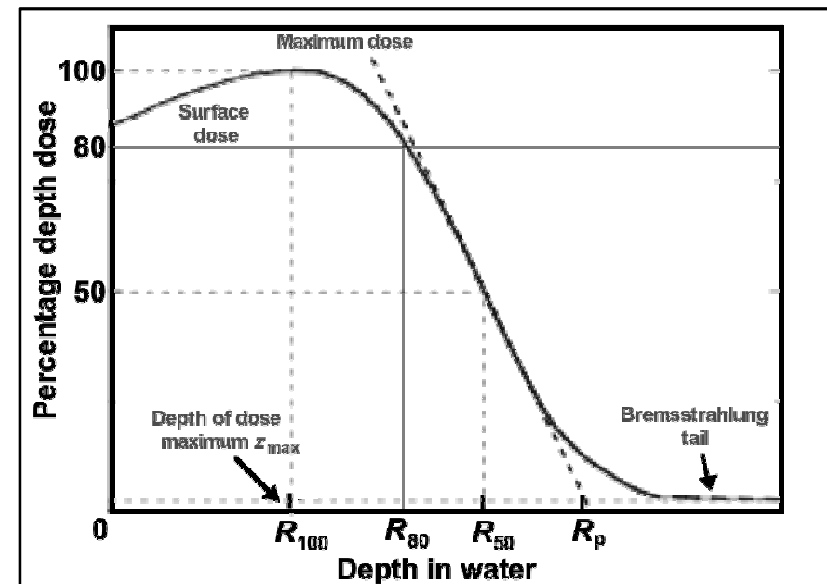
Alcance extrapolado. Electrones

Para el caso de electrones es habitual definir el alcance extrapolado como el punto de corte de la interpolación lineal del número de electrones transmitidos en función del espesor másico del material. (En niveles de megavoltaje el poder de frenado en agua está entorno a 2MeV/cm)

Se define como R50 (R90) el espesor másico al cual el número de electrones transmitidos es la mitad (90%) de los electrones incidentes en la lámina de material.



| Electron energy (MeV) | CSDA range in air (g/cm ²) | CSDA range in water (g/cm ²) |
|-----------------------|--|--|
| 6 | 3.255 | 3.052 |
| 7 | 3.756 | 3.545 |
| 8 | 4.246 | 4.030 |
| 9 | 4.724 | 4.506 |
| 10 | 5.192 | 4.975 |
| 20 | 9.447 | 9.320 |
| 30 | 13.150 | 13.170 |



Alcance. Fórmulas semiempíricas. Partículas alpha

Para partículas alpha la diferencia entre el alcance máximo y alcance extrapolado es pequeña (menos del 5%). En general se suele dar el rango en el aire (a temperatura y presión estándar)

$$\begin{aligned} R(mm) &= \exp[1.61\sqrt{T}] & 1MeV < T \leq 4MeV \\ R(mm) &= (0.05T + 2.85)T^{3/2} & 4MeV < T \leq 15MeV \end{aligned}$$

Donde T es la energía cinética de las partículas alpha en MeV. Estas fórmulas pueden ser utilizadas para calcular el alcance en otros medios (con igual energía cinética inicial) considerando la regla de Bragg-Kleeman

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_2 \sqrt{A_1}}{\rho_1 \sqrt{A_2}}; \quad \rho_{aire} = 1.29 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

En esta fórmula semiempírica podremos usar un número másico efectivo del medio de acuerdo a la ecuación siguiente

$$\sqrt{A_{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\sqrt{A_i}}}$$

Por ejemplo en el caso de aire (22.9% O, 74.5% N, 2.6% Ar) tendremos que

$$\sqrt{A_{eff}} = \left[\frac{0.229}{\sqrt{16}} + \frac{0.745}{\sqrt{14}} + \frac{0.026}{\sqrt{40}} \right]^{-1} = 3.84; \quad A_{eff} = 14.7$$

Alcance. Fórmulas semiempíricas. Partículas alpha

Podemos entonces calcular el alcance de una partícula alpha partiendo de su alcance en aire. Por ejemplo, podemos calcular el alcance de una partícula alpha de 10 MeV de energía cinética en aluminio. Recordemos que

$$\begin{aligned} R(mm) &= \exp[1.61 \sqrt{T}] & 1MeV < T \leq 4MeV \\ R(mm) &= (0.05 T + 2.85) T^{3/2} & 4MeV < T \leq 15MeV \end{aligned}$$

Por tanto en aire

$$R(mm) = (0.05 \cdot 10 + 2.85) 10^{1.5} = 105.9 \text{ mm}$$

En aluminio tendremos

$$R_1 = R_2 \frac{\rho_2 \sqrt{A_1}}{\rho_1 \sqrt{A_2}} = 105.9 \frac{1.29 \cdot 10^{-3}}{2.7} \sqrt{\frac{27}{14.7}} = 68.6 \text{ } \mu\text{m}$$

Esta fórmula de Bragg-Kleeman se puede usar para calcular el alcance en otros medios como por ejemplo en oro, partiendo del cálculo en aluminio

$$R_1 = R_2 \frac{\rho_2 \sqrt{A_1}}{\rho_1 \sqrt{A_2}} = 68.6 \text{ } \mu\text{m} \frac{2.7}{19.3} \sqrt{\frac{197}{27}} = 25.9 \text{ } \mu\text{m}$$

Alcance. Fórmulas semiempíricas. Protón y deuterio

En el caso de protón y deuterio podemos calcular su alcance en aire usando el alcance de una partícula alpha en aire con su misma velocidad, esto es

$$T_{\alpha} = \frac{M_{\alpha}}{M_p} T_p; \quad \text{o bien} \quad T_{\alpha} = \frac{M_{\alpha}}{M_d} T_d;$$

Una vez conocida la energía cinética correspondiente calculamos el alcance de la partícula alpha y después el alcance de protón o deuterón mediante

$$R(p, d) = 4 \frac{M(p, d)}{M_{\alpha}} R_{\alpha} - 2;$$

Donde el rango de la partícula alpha y del protón o deuterón están en mm.

Por ejemplo, si queremos calcular el rango de deuterio de 5 MeV en aluminio. Primero calcularemos el rango de una partícula alpha equivalente en aire

$$T_{\alpha} = \frac{M_{\alpha}}{M_d} T_d \approx 2T_d = 10 \text{ MeV}$$

$$R(\text{mm}) = (0.05 \cdot 10 + 2.85) 10^{1.5} = 105.9 \text{ mm}$$

Calculamos el rango del deuterio en aire

$$R(\text{mm}) = 4 \frac{1}{2} R_{\alpha} - 2 = 2 \cdot 106 - 2 = 210 \text{ mm}$$

Y usamos la regla de Bragg-Kleeman para calcular

$$R_1 = R_2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}} = 210 \text{ mm} \frac{1.29 \cdot 10^{-3}}{2.7} \sqrt{\frac{27}{14.7}} = 136 \mu\text{m}$$

Alcance. Fórmulas semiempíricas. Protón

Otra opción en el cálculo del alcance de protones es usar la parametrización de Bichsel en aluminio (Phys. Rev. 112 1958)

$$\begin{array}{l} R(\mu m) = 14.21 T^{1.5874} \quad 1MeV < T \leq 2.7MeV \\ R(\mu m) = 10.5 \frac{T^2}{0.68 + 0.434 \ln(T)} \quad 2.7MeV < T \leq 20MeV \end{array} \quad T \text{ (MeV)}$$

Una vez calculado el alcance en aluminio se puede obtener el correspondiente alcance en otro medio teniendo en cuenta la regla de Bragg-Kleeman.

Por ejemplo podemos determinar el alcance de un protón de 10 MeV en silicio. Para ello calculamos primero el alcance en aluminio

$$R = 10.5 \frac{10^2}{0.68 + 0.434 \ln(10)} = 625 \mu m$$

Calculamos el rango en silicio

$$R_1 = R_2 \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}} = 625 \mu m \frac{2.7}{2.33} \sqrt{\frac{28}{27}} = 737 \mu m$$

Alcance. Fórmulas semiempíricas. Electrones y positrones

Una fórmula aproximada para el alcance extrapolado proviene de Tabata, Ito y Okabe (NIM 103 1972).

$$R(\text{kg} / \text{m}^2) = a_1 \left(\frac{\ln[1 + a_2(\gamma - 1)]}{a_2} - \frac{a_3(\gamma - 1)}{1 + a_4(\gamma - 1)^{a_5}} \right) \quad T \text{ (MeV)}$$

Los parámetros a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 dependen de A y Z de la forma

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2.335 A}{Z^{1.209}} & a_2 &= 1.78 \cdot 10^{-4} Z & a_3 &= 0.9891 - 3.01 \cdot 10^{-4} Z \\ a_4 &= 1.468 - 1.180 \cdot 10^{-2} Z & a_5 &= \frac{1.232}{Z^{0.109}} & \gamma &= \frac{1.511}{0.511} = 2.957 \end{aligned}$$

Por ejemplo podemos determinar el alcance de un electrón de 1 MeV en aluminio (Z=13, A=27)

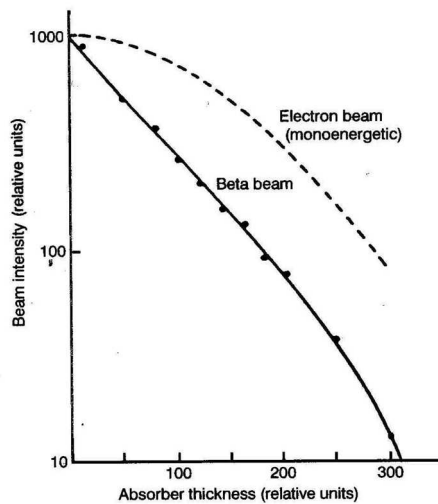
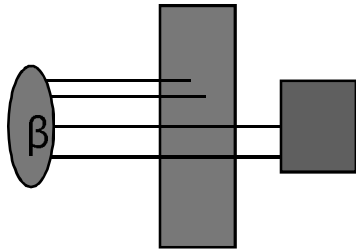
$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2.335 \cdot 27}{(13)^{1.209}} = 2.837 & a_2 &= 1.78 \cdot 10^{-4} \cdot 13 = 2.31 \cdot 10^{-3} & a_3 &= 0.9891 - 3.01 \cdot 10^{-4} \cdot 13 = 0.985 \\ a_4 &= 1.468 - 1.180 \cdot 10^{-2} \cdot 13 = 1.3146 & a_5 &= \frac{1.232}{(13)^{0.109}} = 0.9315 \end{aligned}$$

$$R(\text{kg} / \text{m}^2) = 2.837 \left(\frac{\ln[1 + 2.3 \cdot 10^{-3}(2.957 - 1)]}{2.3 \cdot 10^{-3}} - \frac{0.985(2.957 - 1)}{1 + 1.3146(2.957 - 1)^{0.9315}} \right) = 3.93 \text{ kg} / \text{m}^2 = 0.393 \text{ g} / \text{cm}^2$$

$$R(\text{cm}) = \frac{0.393 \text{ g} / \text{cm}^2}{2.7 \text{ g} / \text{cm}^3} = 0.146 \text{ cm} = 1.46 \text{ mm}$$

Fórmulas semiempíricas. Transmisión para fuentes beta

En las fórmulas de alcance para electrones consideramos electrones monoenergéticos. Sin embargo si estudiamos la fracción de electrones transmitidos a través de un cierto espesor t de un material, hemos de tener en cuenta que una fuente beta emite electrones con energías cinéticas desde 0 hasta E_{max} . La dependencia del número de electrones transmitidos con el espesor puede considerarse como exponencial



$$N(t) = N_0 \exp(-\mu t)$$

Siendo t el espesor másico del material interpuesto entre la fuente y el detector. El valor del coeficiente de atenuación efectivo se ha determinado experimentalmente

$$\mu(m^2 / kg) = 1.7 \cdot E_{max}^{-1.14}$$

Donde E_{max} está en MeV.

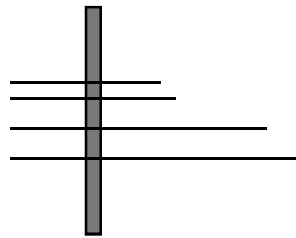
Podemos entonces calcular la fracción de electrones provenientes de una fuente de ^{32}P que atravesarán una lámina de 0.2 mm de Al. El ^{32}P emite betas con una energía máxima de 1.71 MeV

$$\mu(m^2 / kg) = 1.7 \cdot (1.71)^{-1.14} = 0.92 m^2 / kg$$

$$\frac{N(t)}{N_0} = \exp(-\mu t) = \exp(-0.92 \cdot 0.2 \times 10^{-3} m \cdot 2.7 \times 10^3 kg / m^3) = 0.61$$

Dosis en láminas delgadas depositada por partículas cargadas

Consideremos un haz de partículas cargadas monoenergético que incide perpendicularmente sobre una lámina delgada (número atómica Z). Sea T_0 la energía cinética de las partículas incidentes. En el caso más simple podemos suponer que se cumplen los siguientes requisitos:



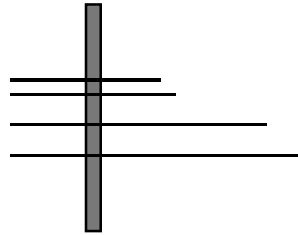
- El poder de frenado por colisión es casi constante en el espesor y la pérdida de energía cinética es pequeña comparada con T_0
- Todas las partículas siguen una trayectoria prácticamente recta al atravesar la lámina.
- La energía cinética de los rayos δ que abandonan la lámina es despreciable. Bien porque el rango de estos rayos es menor que el espesor de la lámina. O bien porque ésta se encuentra insertada entre láminas adyacentes de modo que para cada rayo δ que abandona la lámina otro penetra en la misma. Esto es existe equilibrio de partículas cargadas respecto a los rayos δ .

En general para partículas cargadas pesadas estas condiciones se suelen satisfacer. En el caso de electrones despreciamos aquí su retrodispersión, y el efecto de múltiple scattering que tiende a hacer que sus trayectorias se desvíen significativamente de la línea recta.

Bajo éstas hipótesis cada partícula cargada pierde una energía igual a su poder de frenado por el espesor de material. Así que la energía perdida por unidad de área es

$$E = \Phi \left(\frac{dT}{\rho dx} \right)_c \rho t; \quad \Phi \text{ fluencia } \text{part} / \text{cm}^2; \quad \left(\frac{dT}{\rho dx} \right)_c \text{ en } \frac{\text{MeV}}{\text{g} / \text{cm}^2}; \quad \rho t \text{ espesor másico } \text{g} / \text{cm}^2$$

Dosis en láminas delgadas depositada por partículas cargadas



Considerando la situación de CPE para los rayos δ , podemos considerar que la energía perdida por el haz es igual a la energía impartida en la lámina. Por lo cual la dosis se puede calcular como la energía impartida dividida por la masa asociada a la unidad de área, esto es

$$D = \frac{E}{\rho t} = \frac{\Phi \left(\frac{dT}{\rho dx} \right)_c \rho t}{\rho t} = \Phi \left(\frac{dT}{\rho dx} \right)_c$$

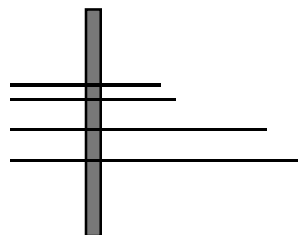
Esto significa que la dosis puede ser calculada como el producto de la fluencia por el poder de frenado másico por colisión en el medio material. En el caso de expresar el poder de frenado en MeV/(g/cm²) y la fluencia en 1/cm², obtendremos D en MeV/g que puede ser convertido a Gy mediante

$$D(\text{Gy}) = 1.602 \cdot 10^{-10} \Phi \left(\frac{dT}{\rho dx} \right)_c$$

La dosis NO DEPENDE del espesor de la lámina. De modo que si se mantienen las hipótesis de este cálculo, si se inclina la lámina de modo que no sea perpendicular al haz la dosis permanece invariante.

En el caso de no cumplirse CPE para los rayos δ , tendremos que usar el poder de frenado restringido en lugar del poder de frenado total por colisión.

Dosis en láminas delgadas depositada por partículas cargadas



En el caso de electrones, incluso en espesores no excesivamente grandes, la hipótesis de trayectorias rectilíneas no es aceptable. Aunque la pérdida de energía cinética no sea importante, la corrección por la longitud efectiva de la trayectoria puede llegar a ser de hasta un 10%.

El parámetro habitual para parametrizar el espesor de un material para electrones es la fracción de longitud de radiación X_0

$$\xi = \frac{\rho t}{X_0}$$

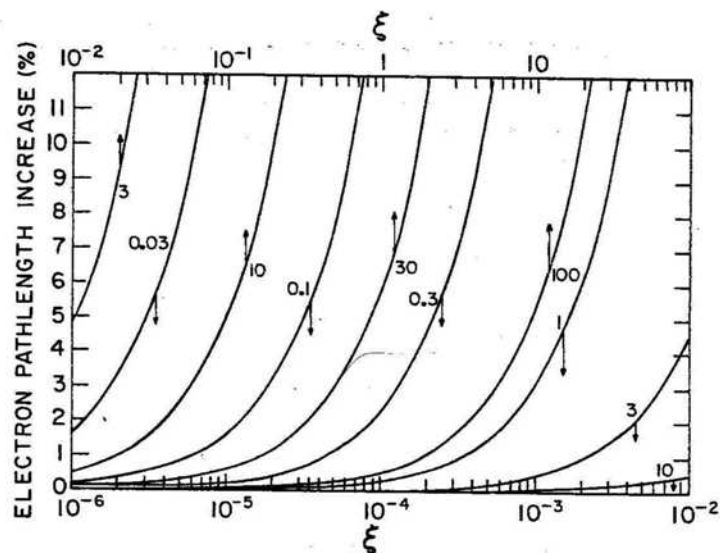


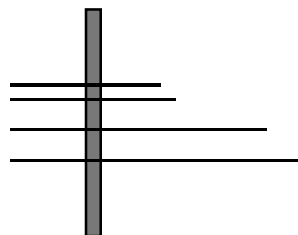
FIGURE 8.11. Percentage increase in mean electron pathlength relative to normalized foil thickness ξ [= foil mass thickness ρt divided by radiation length of the medium; see Eq. (8.28)]. Data were calculated from the "modified Yang theory" according to Birkhoff (1958), given by $50t/w^2$ in Birkhoff's terminology. For a given energy and foil material the percentage increase in pathlength is proportional to foil thickness in the Yang approximation. Numbers on curves give electron energies in MeV.

La gráfica adjunta nos muestra el incremento a aplicar en la longitud efectiva de la trayectoria del electrón en función de este parámetro ξ . Una vez conocido el incremento efectivo Δ de la longitud, podemos calcular

$$D(\text{Gy}) = 1.602 \cdot 10^{-10} \Phi \left(\frac{dT}{\rho dx} \right)_c (1 + \Delta)$$

A primer orden, en láminas delgadas el aumento efectivo (relativo) de la dosis es igual al correspondiente a la longitud efectiva de la trayectoria de electrones.

Dosis en láminas gruesas depositada por partículas cargadas



Cuando consideramos partículas cargadas pesadas en una lámina gruesa, la hipótesis que falla (respecto a las realizadas en lámina fina) es la variación del poder de frenado másico de las partículas (i.e. variación de su velocidad).

La pérdida de energía cinética en lámina gruesa es considerable comparada con el valor de ésta. Sea T_0 la energía cinética incidente del haz monoenergético y T_{ex} la energía cinética media de las partículas emergentes de la lámina. Podremos decir que la pérdida de energía cinética es

$$\Delta T = T_0 - T_{ex}$$

La energía media depositada en la lámina por unidad de superficie es igual a la fluencia del haz multiplicada por la pérdida media de energía cinética

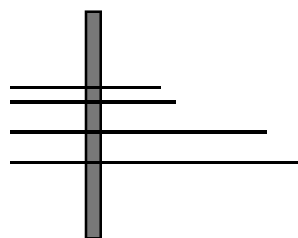
$$E = \Phi \cdot \Delta T$$

La dosis media corresponde al cociente entre esta energía y la masa correspondiente a la unidad de área de la lámina

$$\bar{D} = \frac{\Phi \cdot \Delta T}{\rho t}; \quad \bar{D}(Gy) = 1.602 \cdot 10^{-10} \frac{\Phi \cdot \Delta T}{\rho t}; \quad \Phi \text{ en } cm^{-2} \quad \Delta T \text{ en } MeV \quad \rho t \text{ en } g/cm^2$$

Una técnica de cálculo consiste en evaluar el alcance CSDA para T_0 en el material R_0 . A este valor de alcance le restamos el valor de espesor de la lámina $R_{ex} = R_0 - \rho t$ y obtenemos el alcance residual de las partículas emergentes. Tomando este alcance R_{ex} buscamos la energía cinética que le corresponde en la tabla CSDA y obtenemos T_{ex} de donde calculamos ΔT .

Dosis en láminas gruesas depositada por partículas cargadas



En el caso de electrones el principio de cálculo es el mismo. Esencialmente hemos de hacer dos correcciones:

- La longitud de trayectoria media es superior al espesor de la lámina y normalmente esta discrepancia es proporcional al espesor del material.
- Una parte de la pérdida de energía en el medio se invierte en la producción de radiación de frenado. Esta fracción la habíamos caracterizado por $Y(T)$ la fracción neta de energía radiada (diap. 58)

La energía media depositada en la lámina por unidad de superficie es igual a la fluencia del haz multiplicada por la pérdida media de energía cinética empleada en colisiones

$$E = \Phi \cdot \Delta T_c$$

$$\Delta T_c = T_0(1 - Y(T_0)) - T_{ex}(1 - Y(T_{ex}))$$

La dosis media será

$$\bar{D} = \frac{\Phi \cdot \Delta T_c}{\rho t}; \quad \bar{D}(Gy) = 1.602 \cdot 10^{-10} \frac{\Phi \cdot \Delta T_c}{\rho t}; \quad \Phi \text{ en } cm^{-2} \quad \Delta T \text{ en } MeV \quad \rho t \text{ en } g/cm^2$$

Dosis en láminas gruesas depositada por electrones. Ejemplo

Consideremos un haz de electrones de 10 MeV con una fluencia de 10^{10} cm^{-2} que incide perpendicularmente sobre una lámina de plomo de 1 mm de espesor. Espesor másico 1.13 g/cm^2 . La longitud de radiación del plomo es $X_0=6.496 \text{ g/cm}^2$ (Attix) ($X_0=6.213 \text{ g/cm}^2$ fórmula diap. 55).

Usamos el apéndice E del Attix para estimar el rango de los electrones

$$R_{CSDA}(10 \text{ MeV}) = 6.133 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}; \quad \xi = \frac{1.13}{6.496} = 0.17$$

El espesor normalizado es 0.17 y buscamos en la gráfica inferior el porcentaje de incremento de la longitud media de las trayectorias de los electrones. Obtenemos un incremento entorno al 8%. Por lo cual el valor de la longitud media de trayectoria es $1.13 \text{ g/cm}^2 (1+0.08) = 1.22 \text{ g/cm}^2$

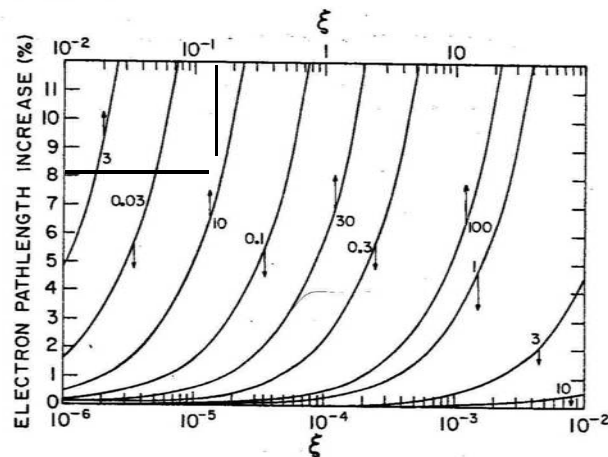


FIGURE 8.11. Percentage increase in mean electron pathlength relative to normalized foil thickness ξ [= foil mass thickness ρt divided by radiation length of the medium; see Eq. (8.28)]. Data were calculated from the "modified Yang theory" according to Birkhoff (1958), given by $50u/w^2$ in Birkhoff's terminology. For a given energy and foil material the percentage increase in pathlength is proportional to foil thickness in the Yang approximation. Numbers on curves give electron energies in MeV.

El rango residual de electrones emergentes es $(6.13 - 1.22) \text{ g/cm}^2 = 4.91 \text{ g/cm}^2$. Esto se corresponde a T_{ex} (en la tabla) 7.5 MeV (aprox). De aquí

$$\Delta T_c = 10 \cdot (1 - 0.316) - 7.5 \cdot (1 - 0.265) = 1.33 \text{ MeV}$$

$$\bar{D}(\text{Gy}) = 1.602 \cdot 10^{-10} \frac{10^{10} \cdot 1.33}{1.13} = 1.9 \text{ Gy}$$

Haces de partículas cargadas. Distribución de dosis en profundidad

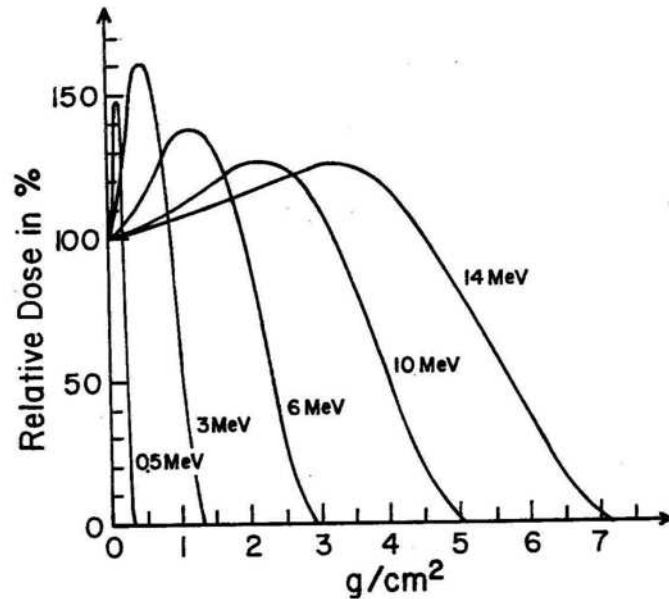


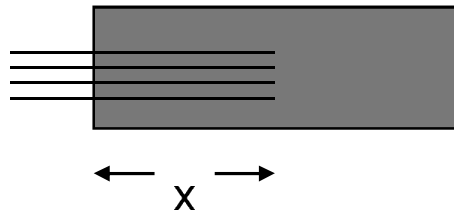
FIGURE 8.14a. Dose vs. depth in water for broad electron beams of the indicated incident energies. (After Holm, 1969. Reproduced with permission of N. W. Holm and Academic Press.)

Cuando irradiamos un medio mediante un haz de partículas cargadas la deposición de dosis en profundidad es consecuencia del transporte de las partículas en ese medio. En el caso de partículas cargadas pesadas se produce la curva de Bragg con un pico abrupto al final de la trayectoria de los iones. Sin embargo para electrones las curvas son mucho más suaves debido a la dispersión de los electrones en el medio.

Un cálculo estricto requiere conocer a cada profundidad el espectro de energía de las partículas o bien su fluencia como función de su energía cinética.

$$\Phi(x, T) = \frac{dN}{da dT}; \quad \text{expresado como } \frac{\text{part}}{\text{cm}^2 \text{MeV}}$$

$$D_{\text{medio}}(x) = 1.602 \cdot 10^{-10} \int_0^{T_{\text{max}}} dT \Phi(x, T) \left(\frac{dT}{\rho dx} \right)_{\text{col, medio}}^T$$



Podemos obtener la energía cinética media a una profundidad x usando la técnica previa de evaluar el rango residual después de atravesar una lámina de espesor x . De este rango obtenemos $T(x)$ medio

$$\Phi(x, \bar{T}_x) \approx \Phi_0; \quad D_{\text{medio}}(x) = 1.602 \cdot 10^{-10} \Phi_0 \left(\frac{dT}{\rho dx} \right)_{\text{col, medio}}^{\bar{T}_x}$$

Bremsstrahlung. Producción de rayos X

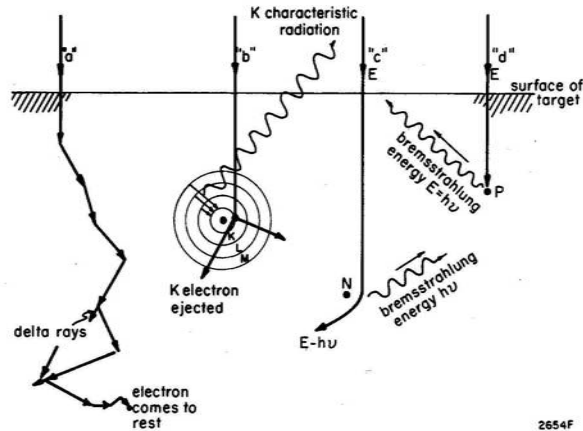


Figure 2-14. Typical electron interactions with a target. (a) Electron suffers ionizational losses, giving rise to delta rays and eventually heat. (b) The electron ejects a K electron, giving rise to characteristic radiation. (c) Collision between an electron of energy E and a nucleus, leading to bremsstrahlung of energy $h\nu$. The electron recedes from the "collision" with energy $E - h\nu$. (d) Rare collision when the electron is completely stopped in one collision, giving rise to a photon of energy $E = h\nu$.

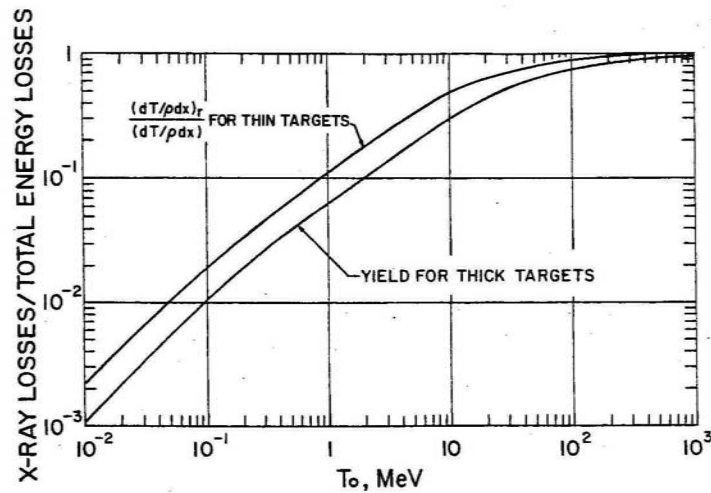


FIGURE 9.4. Fraction of electron energy losses that are spent in bremsstrahlung x-ray production in thin (upper curve) or thick (lower curve) tungsten targets (data after Berger and Seltzer, 1983). Upper curve: Eq. (9.2); lower curve: radiation yield (fraction of the incident electron kinetic energy T_0 that goes into x-ray production as the particle slows to a stop in a thick target).

Los haces de rayos X son una de las técnicas más usadas en diagnóstico y terapia. Cuando lanzamos un haz de partículas cargadas (normalmente electrones) contra un blanco se producen diferentes tipos de colisiones (según hemos visto) con los átomos del medio. De todas ellas solo una pequeña fracción excitan niveles característicos de los átomos del blanco o bien producen fotones por breemstrahlung.

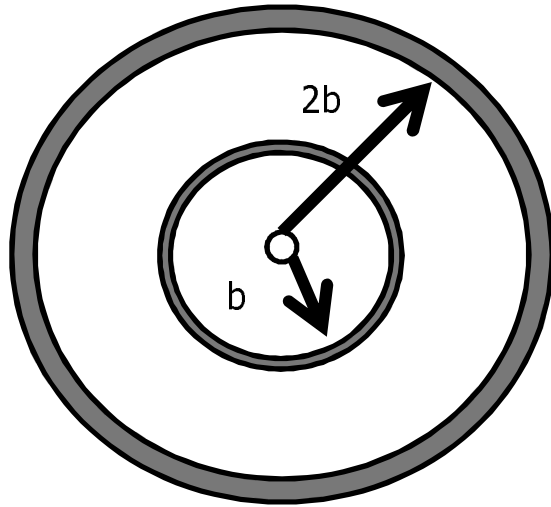
Si consideramos las pérdidas por radiación (Attix) aproximadamente se pueden parametrizar como

$$\left(\frac{dT}{\rho dx} \right)_{rad} \approx \frac{T \cdot Z}{C + T \cdot Z}$$

T en MeV

Donde C varía para Tungsteno desde 336 a 10 keV, 649 a 1 MeV hasta 775 a 100 MeV. La mayor parte de la energía se emplea en procesos de excitación, ionización que finalmente se convierte en calor. Para un haz de 100 keV (radiodiagnóstico) sólo el 1% de su energía se convierte en radiación de frenado para un blanco grueso de tungsteno ($Z=74$).

Bremsstrahlung. Producción de rayos X. Haz primario



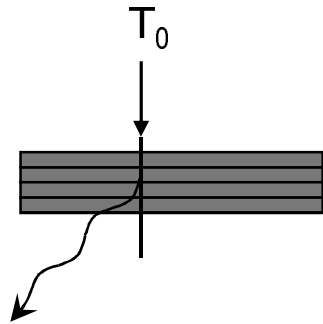
En el caso de una colisión de un electrón hemos visto que la transferencia de momento en la colisión es proporcional a $1/b$ siendo b el parámetro de impacto. Así la energía del fotón (su momento) es proporcional en un suceso individual a $1/b$

$$h\nu \propto \frac{1}{b}$$

Si consideramos la sección eficaz diferencial asociada al parámetro de impacto b , ésta tiene un valor $2\pi b \cdot db$. Mientras que si duplicamos el parámetro de impacto la sección eficaz diferencial el doble con un valor $4\pi b \cdot db$. Por tanto se producen el doble de colisiones con parámetro de impacto entre $2b$ y $2b+db$ que colisiones con parámetro de impacto entre b y $b+db$, sin embargo los fotones producidos en las primeras colisiones tienen la mitad de energía que los fotones que se producen en las segundas. Se cumple así que si N es el número de fotones producidos por bremsstrahlung con energía $h\nu$

$$N_{h\nu} \otimes h\nu \approx cte$$

Bremsstrahlung. Producción de rayos X. Haz primario



Consideremos un haz monoenergético de electrones que incide sobre un blanco metálico. Si consideramos el parámetro de impacto b respecto al núcleo de un átomo del blanco, haremos el ansatz (Sommerfeld, Kramers) de que la energía del fotón de bremsstrahlung $h\nu$ es proporcional a $1/b$.

Esta asunción significa que si los electrones inciden sobre una lámina delgada, la fluencia de energía emitida con energías $h\nu$ entre 0 y la energía cinética T_0 del electrón es constante. Por tanto, el espectro energético de la fluencia de energía de los fotones producidos en lámina delgada es plano. (La fluencia de energía es plana!)

Dividimos el blanco (grosso) en n láminas finas de material superpuestas. Cuando el electrón atraviesa la primera lámina produce radiación de frenado con fluencia en energía constante entre 0 y T_0 . Al penetrar en la segunda lámina consideramos que tiene energía cinética $T_1 = T_0 - \Delta T$, y se producen fotones con fluencia en energía constante entre 0 y T_1 . Al incidir sobre la tercera lámina tendremos $T_2 = T_1 - \Delta T$ y un espectro plano de fluencia en energía entre 0 y T_2 . Y así sucesivamente.

$$\left(\frac{dT}{\rho dx} \right)_{rad} \approx \frac{1}{137} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left(\frac{N_A Z^2}{A} \right) (T + m_e c^2) \bar{B}_r$$

$$\left(\frac{dT}{\rho dx} \right)_{rad} \approx 5.80 \times 10^{-28} \frac{cm^2}{atomo} \left(\frac{N_A Z^2}{A} \right) (T + 0.511) \frac{16}{3} \approx 9.52 \times 10^{-4} \left(\frac{Z^2}{A} \right) \frac{cm^2 MeV}{g}$$

Hacemos la aproximación no relativista y despreciamos T frente a la masa del e^-

Bremsstrahlung. Producción de rayos X. Haz primario

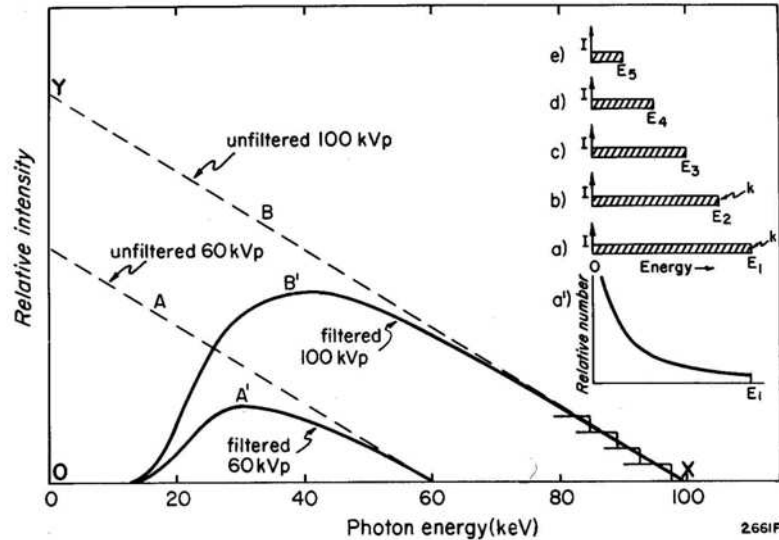


Figure 2-15. Relative energy or intensity I , in each photon energy interval produced when a beam of monoenergetic electrons of energy E_1 bombard a thin target. The distribution a' is the data of a converted to a number distribution. Curves $b, c, d,$ and e are thin target intensity spectra similar to a but for electron energies of $E_2, E_3, E_4,$ and E_5 . The main diagram shows *thick target* spectra (dotted lines A and B) produced by the superposition of many thin target spectra when the target is bombarded with 60 and 100 keV electrons. The solid curves A' and B' were obtained from A and B by taking into account the attenuation of 2 mm Al.

En general, tendremos que la energía emitida como radiación de frenado en la capa n será

$$R_n = 9.52 \times 10^{-4} \left(\frac{Z^2}{A} \right) N_e \frac{T_0 - (n-1)\Delta T}{T_0} \rho t_1$$

La energía total emitida como radiación de frenado viene dada por

$$R = 9.52 \times 10^{-4} \left(\frac{Z^2}{A} \right) N_e \rho t_1 \sum_{n=1}^N \frac{T_0 - (n-1)\Delta T}{T_0}$$

Donde se verifica que

$$\rho t_1 \sum_{n=1}^N \frac{T_0 - (n-1)\Delta T}{T_0} = \mathfrak{R}(T_0)$$

La suma de todos los espesores máxicos hasta que el electrón se detiene es el alcance del electrón en el medio material correspondiente a su energía cinética inicial T_0 . Por lo tanto obtenemos finalmente R en MeV

$$R = 9.52 \times 10^{-4} \left(\frac{Z^2}{A} \right) N_e \mathfrak{R}(T_0)$$

$$R'(hv) = C N_e Z (hv_{\max} - hv); \quad 0 < hv < hv_{\max} = T_0$$

La suma de la radiación producida en todas las láminas da lugar a una distribución de intensidad frente a la energía triangular conocida como "espectro de Kramers" (Kramers 1923), cuya área total bajo debe corresponderse a la fórmula anterior aproximadamente.

Bremsstrahlung. Producción de rayos X. Haz primario

Usando la fórmula anterior podemos calcular la potencia emitida P como rayos X por un tubo. Normalmente la operación del tubo se caracteriza por el kilovoltaje de aceleración de los electrones (que nos da T_0) y la corriente de electrones $I = e \, dN_e/dt$. Por tanto

$$R = 9.52 \times 10^{-4} \left(\frac{Z^2}{A} \right) N_e \mathfrak{R}(T_0)$$

$$P(W) = 9.52 \times 10^2 \left(\frac{Z^2}{A} \right) I \mathfrak{R}(T_0)$$

Siendo W la potencia supuesta despreciando la absorción en el propio blanco y el la carcasa del tubo de la radiación X. Por otra parte esta misma cantidad se puede calcular usando la fracción neta de radiación $Y(T_0)$ ya que se verifica que (T_0 en MeV)

$$R = T_0 N_e Y(T_0)$$

$$P(W) = 10^6 T_0 I Y(T_0)$$

Veamos un ejemplo: supongamos un tubo de rayos X que tiene un blanco de tungsteno y que opera a 150 kV con una corriente de 1mA. Por tanto $Z=74$, $A=183.85$, $T_0=150$ keV. Si vamos a las tablas encontraremos $R_{csda}=5.7E-2$ g/cm² $Y(T_0)=1.5E-2$, por lo tanto

$$P(W) = 9.52 \times 10^2 \left(\frac{Z^2}{A} \right) I \mathfrak{R}(T_0) = 9.52 \times 10^2 \left(\frac{(74)^2}{183.85} \right) \cdot 10^{-3} \cdot 5.7 \cdot 10^{-2} = 1.6 \, W$$

$$P(W) = 10^6 T_0 I Y(T_0) = 10^6 \cdot 0.15 \cdot 10^{-3} \cdot 1.5 \cdot 10^{-2} = 2.25 \, W$$

Se observa una diferencia de más de un 30% debido a las aproximaciones hechas. El cálculo usando $Y(T_0)$ tabulado es el más exacto. Obsérvese que la potencia empleada por la fuente de alta tensión es $150\text{kV} \times 1\text{mA} = 150 \, W$ mientras que la potencia emitida como RX es 2.25W. La eficiencia de emisión de radiación X es del 1.5% en este caso.

Bremsstrahlung. Producción de rayos X. Haz primario

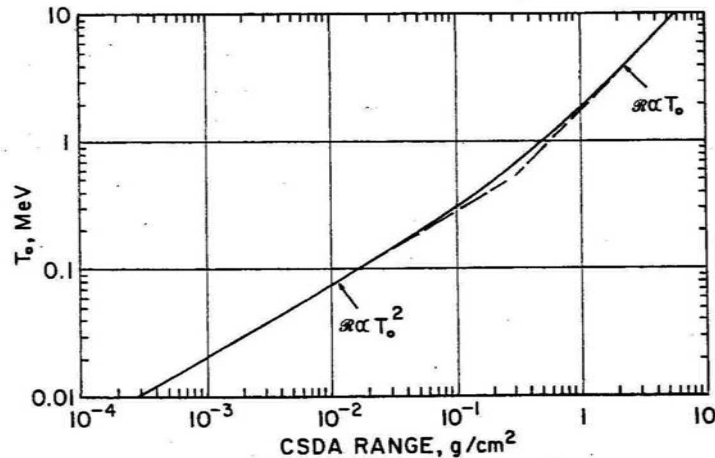


FIGURE 8.10. CSDA range ($\cong 1.05t_{\max}$) of electrons in carbon. Note dependence upon T_0 above 2 MeV and upon T_0^2 below 0.1 MeV. t_{\max} is comparable for higher Z -values as well. Data after Berger and Seltzer (1983); see Appendix E tables.

Si queremos obtener una relación entre la radiación emitida por el tubo y el kilovoltaje (la energía cinética T_0 de los electrones) basta estudiar la dependencia del alcance de los electrones con T_0 . A bajas energías se puede suponer que

$$\left(\frac{Z}{A}\right) \mathfrak{R}(T_0) \approx k T_0^2$$

Con k del orden de $1 \text{ g cm}^{-2} \text{ MeV}^{-2}$

$$R = 9.52 \times 10^{-4} \left(\frac{Z^2}{A}\right) N_e \mathfrak{R}(T_0) \approx 9.52 \times 10^{-4} Z N_e T_0^2$$

La potencia en watt viene dada entonces por la expresión (donde T_0 está en MeV e I en ampére)

$$P(W) \approx 10^3 Z I T_0^2$$

Recordemos que T_0 es igual a la tensión de aceleración en MV. Por lo tanto en el régimen no relativista aproximadamente la potencia emitida se comporta cuadráticamente con la tensión (i.e. si duplicamos el kilovoltaje la potencia total emitida es cuadruplicada). Este resultado se corresponde con el espectro primario rectangular cuya área se cuadruplica al duplicar el kilovoltaje ($h\nu_{\max}$). El espectro triangular "primario" nunca se observa en la práctica ya que los fotones de muy baja energía son absorbidos en el tubo. Esto provoca un incremento en la dependencia efectiva de la potencia con el kilovoltaje donde el exponente del voltaje (de T_0) está más bien cercano a 3 (en lugar de 2).

Bremsstrahlung. Producción de rayos X.

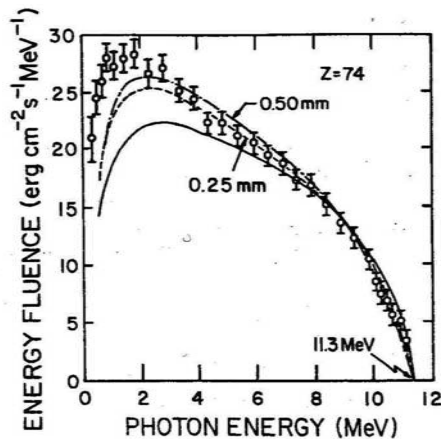


FIGURE 9.8. Bremsstrahlung intensity (energy-flux density) spectrum in the 0° direction for 11.3-MeV electrons on a 1.5-mm tungsten target, as measured with a Compton spectrometer (points). The Bethe-Heitler thin-target spectrum, modified by the photon absorption in window materials, is shown by the solid curve (lower). The dashed curves show corresponding theoretical spectra for 10-mil ($\frac{1}{8}$ -mm) and 20-mil ($\frac{1}{4}$ -mm) tungsten targets corrected for attenuation in the target material as well. (After Motz et al., 1953. Reproduced with permission from J. W. Motz and The American Physical Society.)

Cuando aumentamos la energía de los electrones hasta una situación relativista, la fracción de energía emitida por bremsstrahlung aumenta (i.e. en tungsteno a 10 MeV llega a ser de un 30%). La probabilidad de emisión de un fotón de energía $h\nu$ es aproximadamente proporcional a $1/h\nu$. Se obtiene por tanto un espectro con un máximo de intensidad a energías muy inferiores a la energía máxima (T_0). En caso de electrones de 10 MeV en tungsteno el pico está situado alrededor de 2 MeV (emisión hacia delante).

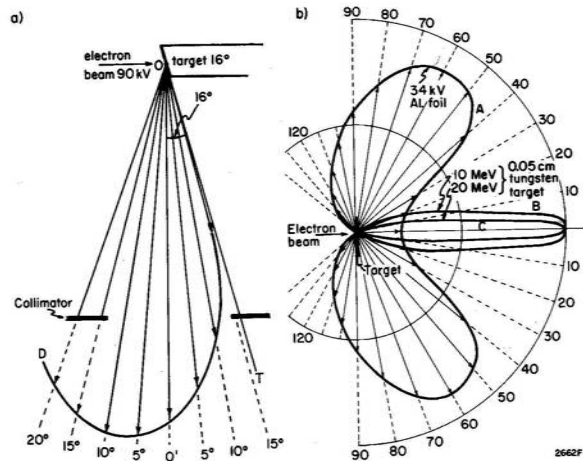
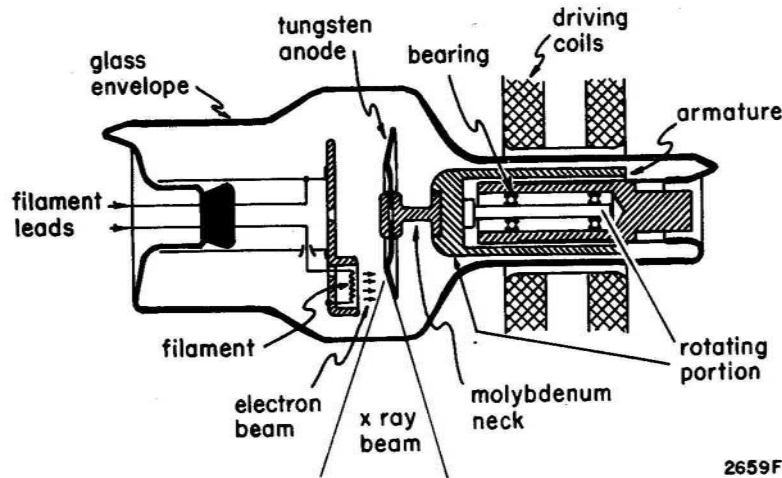


Figure 2-16. Polar diagram showing the variation of the intensity of x rays with angle produced by the electron bombardment of various targets. Curve A, 34 keV electrons bombarding a thin aluminum foil due to Honerjäger (H2). Curves B and C, 10 and 20 MeV electrons bombarding a thin 0.05 cm tungsten target as calculated by Schiff (S2). Curve D typical intensity distribution for a diagnostic x ray tube with a 16° thick tungsten target, with the beam taken at right angles to the electron beam and excited at 90 kV_p (Courtesy of K.W. Taylor).

Otro de los aspectos relevantes del aumento de la energía de los electrones es que, en blancos finos a baja energía la emisión máxima se obtiene a ángulos elevados respecto al momento del electrón. Cuando la energía del electrón es del orden de 10 MeV, sin embargo, prácticamente toda la radiación de frenado se emite hacia delante (ver figura).

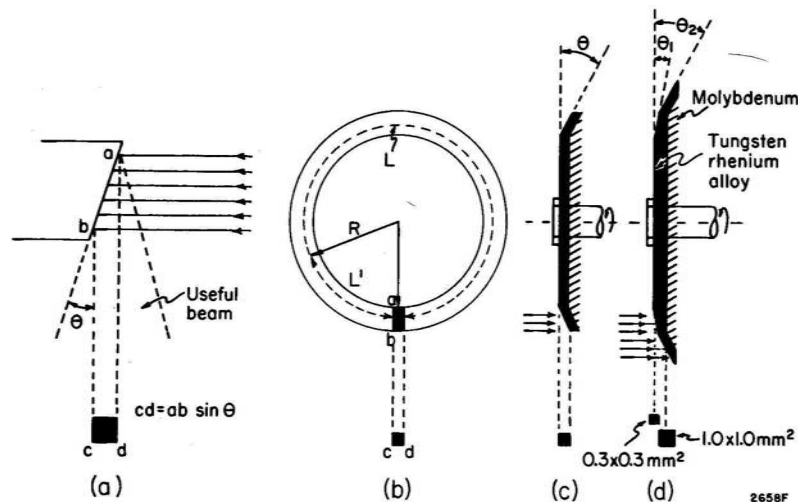
Bremsstrahlung. Producción de rayos X. Tubos de RX



2659F

Figure 2-8. Rotating anode tube, adapted from diagram by Philips.

En los tubos de RX de diagnóstico se soluciona el considerable aporte de calor al blanco haciendolo girar mediante una bobina y un estator. De esta manera, el haz de electrones incide sobre el disco del blanco en diferentes puntos en cada instante de tiempo.



2658F

Figure 2-7. Diagrams illustrating anode construction and focal spots. (a) Line focus fixed anode. (b) Line focus rotating anode, viewed from the end. (c) Line focus rotating anode viewed from the side. (d) Alternative arrangement of rotating anode using two separate "tracks" at different angles as in the Siemens "Biangulix" series.

Los tubos de ánodo fijo suelen consistir en una pieza metálica refrigerada y en forma de cuña, de modo que el calor se reparta en una superficie mucho mayor que la del haz proyectado de fotones en la dirección transversa al haz de electrones.

Los tubos de diagnóstico pueden contar con dos tamaños diferentes de foco dependientes del filamento que se escoja y de la inclinación relativa del blanco.

Bremsstrahlung. Producción de rayos X. Linac

Esquema de un acelerador lineal de electrones de radioterapia y su cabezal. La dependencia angular de la radiación de frenado se corrige mediante el filtro aplanador en forma de cono.

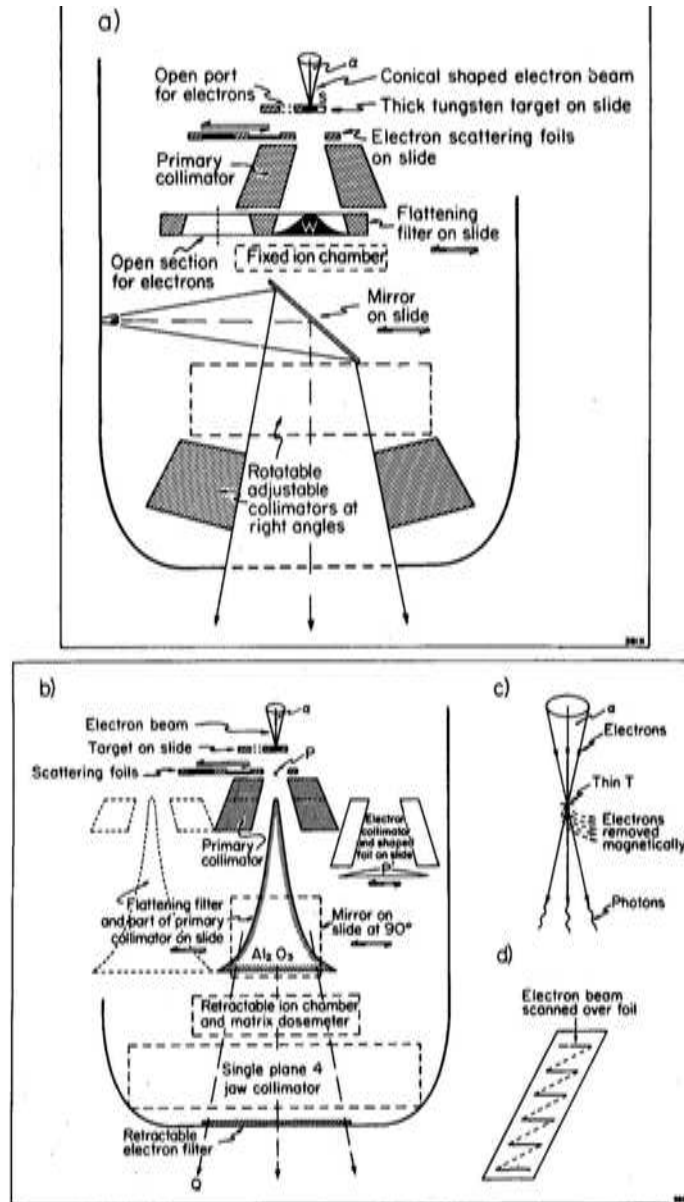


Figure 4-7. (a) Schematic representation of the components generally used by manufacturers of 20-25 MeV linacs. (b) Alternative arrangement of components for high energy linacs allowing use of an Al_2O_3 flattening filter to yield better depth dose distribution. Also included is an improved method for obtaining a uniform electron flux density with minimum bremsstrahlung (R1). (c) Diagram to show how a thin target could be used if the electrons are removed magnetically. (d) Alternative scanning arrangement to produce a uniform electron flux density.

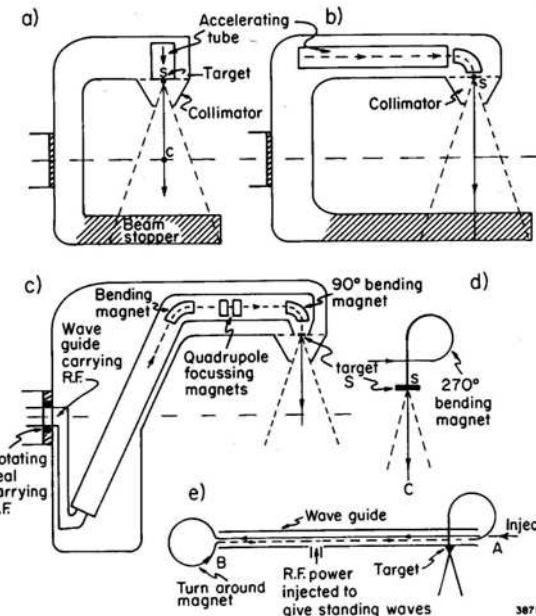
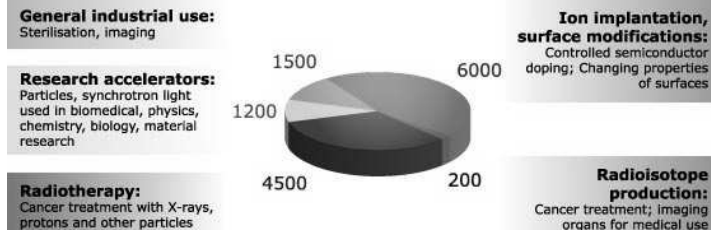


Figure 4-6. Medical Linacs: Arrangements suitable for (a) 4 to 6 MeV, (b) 8-12 MeV, (c) 30 to 35 MeV. (d) A method of bending the electron beam through 90° by using a 270° bending magnet. (e) The "turn around," or "two pass," linac.



Aceleradores en el mundo