

Interacción radiación-materia

- Cuando hemos estudiado la atenuación de haces en la materia, hemos visto que los coeficientes de atenuación expresan en unidades macroscópicas las secciones eficaces microscópicas de todos los procesos elementales de interacción de la radiación.
- Distinguiremos en las interacciones radiación-materia las de los siguientes campos de radiación:
 1. Fotones (rayos X y gamma)
 2. Partículas cargadas: electrones e iones

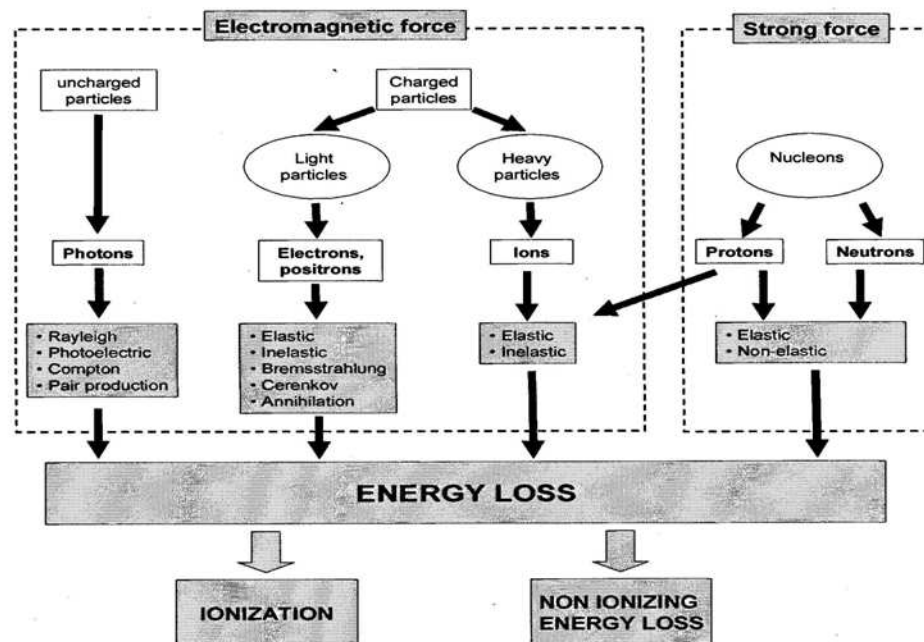


Figure 1: Particles and their main interactions

Interacción radiación-materia

- Dentro de las interacciones de los fotones tendremos los siguientes procesos fundamentales:

Procesos dominantes (aquellos responsables de los mecanismos por los que los fotones pierden más energía o procesos más probables)

1. Efecto Compton (scattering incoherente)
2. Efecto fotoeléctrico
3. Producción de pares (en el campo nuclear)

Procesos subdominantes

1. Producción de pares (en el campo electrónico)
2. Dispersión Rayleigh (scattering coherente)
3. Reacciones fotonucleares

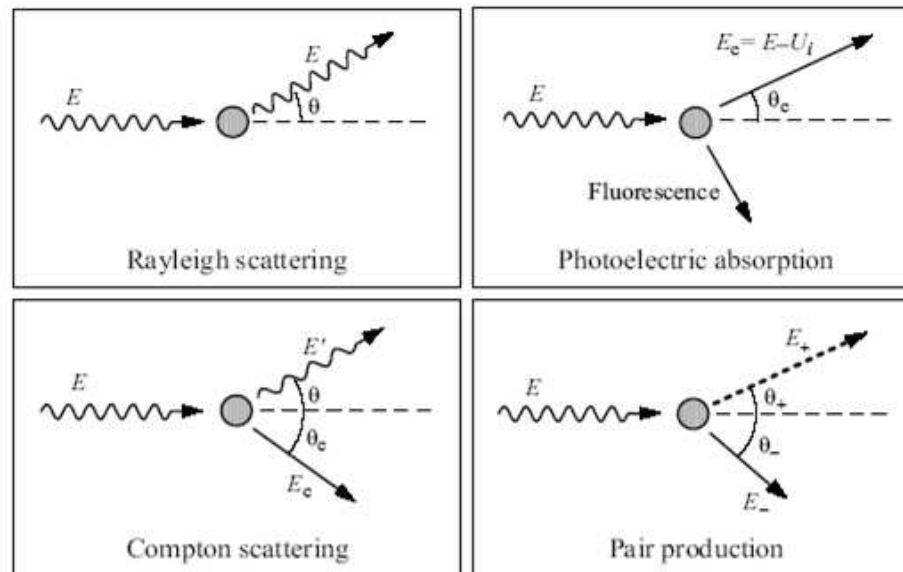


Tabla comparativa

	<i>Photoelectric effect</i>	<i>Rayleigh scattering</i>	<i>Compton effect</i>	<i>Pair production</i>
Photon interaction	With whole atom (bound electron)	With bound electrons	With free electrons	With nuclear Coulomb field
Mode of photon interaction	Photon disappears	Photon scattered	Photon scattered	Photon disappears
Energy dependence	$\frac{1}{(h\nu)^3}$	$\frac{1}{(h\nu)^2}$	Decreases with energy	Increases with energy
Threshold	Shell binding energy	No	Shell binding energy	$\sim 2m_e c^2$
Linear attenuation coefficient	τ	σ_R	σ_c	K
Atomic coefficient dependence on Z	${}_a\tau \propto Z^4$	${}_a\sigma_R \propto Z^2$	${}_a\sigma_c \propto Z$	${}_aK \propto Z^2$
Mass coefficient dependence on Z	$\frac{\tau}{\rho} \propto Z^3$	$\frac{\sigma_R}{\rho} \propto Z$	Independent of Z	$\frac{K}{\rho} \propto Z$

Tabla comparativa

	<i>Photoelectric effect</i>	<i>Rayleigh scattering</i>	<i>Compton effect</i>	<i>Pair production</i>
Particles released in absorber	Photoelectron	None	Compton (recoil) electron	Electron-positron pair
Average energy transferred to charged part's	$h\nu - P_K \omega_K E_B(K)$	0	\bar{E}_r^σ (from The Graph)	$h\nu - 2m_e c^2$
Fraction of energy $h\nu$ transferred	$f^r = 1 - \frac{P_K \omega_K \bar{h\nu}_K}{h\nu}$	0	$f^\sigma = \frac{\bar{E}_r^\sigma}{h\nu}$	$f^k = 1 - \frac{2m_e c^2}{h\nu}$
Subsequent effect	Characteristic x ray, Auger effect	None	Characteristic x ray, Auger effect	Annihilation radiation
Significant energy region for water	< 20 keV	< 20 keV	20 keV – 10 MeV	> 10 MeV

Contribución relativa

Vimos en el capítulo anterior que para el material de referencia dosimétrico (el agua) (Z bajo) la situación era:

$E < 50\text{keV}$ domina el efecto fotoeléctrico

$50\text{keV} < E < 100\text{keV}$ el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton son ambos importantes

$200\text{keV} < E < 2\text{MeV}$ el efecto Compton es prácticamente el único proceso

$5\text{MeV} < E < 10\text{MeV}$ el efecto Compton es dominante y empieza a ser importante la creación de pares

$50\text{MeV} < E < 100\text{MeV}$ la creación de pares es dominante

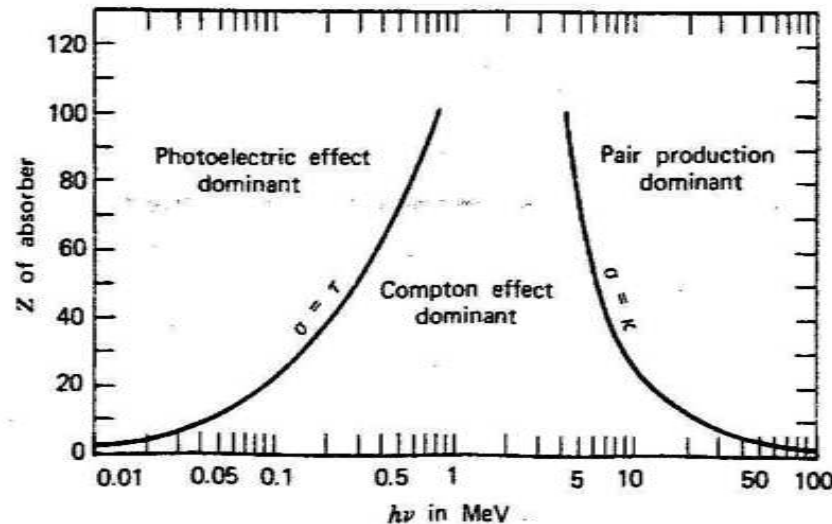
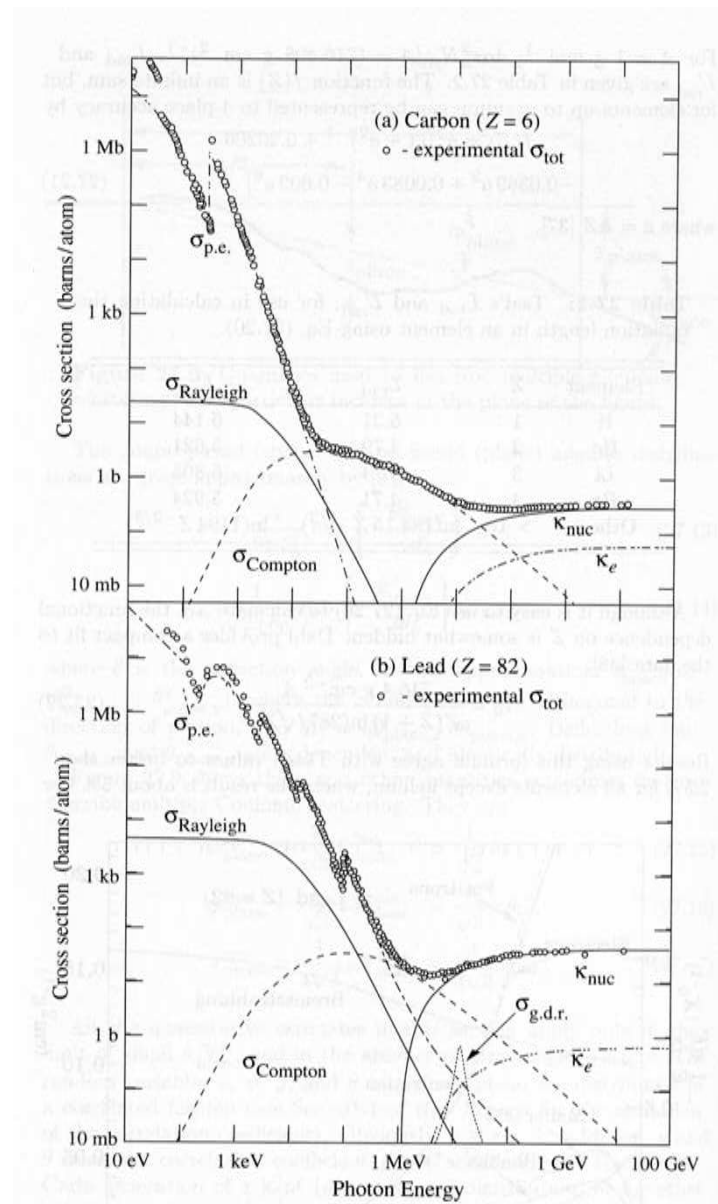


Figure 2.20 The relative importance of the three major types of gamma-ray interaction. The lines show the values of Z and $h\nu$ for which the two neighboring effects are just equal. (From *The Atomic Nucleus* by R. D. Evans, Copyright 1955 by the McGraw-Hill Book Company. Used with permission.)

La importancia relativa del efecto Compton, el fotoeléctrico y la creación de pares depende tanto de la energía del fotón como del número atómico Z del medio material. La figura adjunta muestra las curvas donde dos de los procesos son equiprobables. En general el efecto fotoeléctrico domina a energías bajas, el Compton a energías intermedias y la creación de pares a energías altas. La región de predominancia de Compton se estrecha al aumentar Z .

Contribución relativa

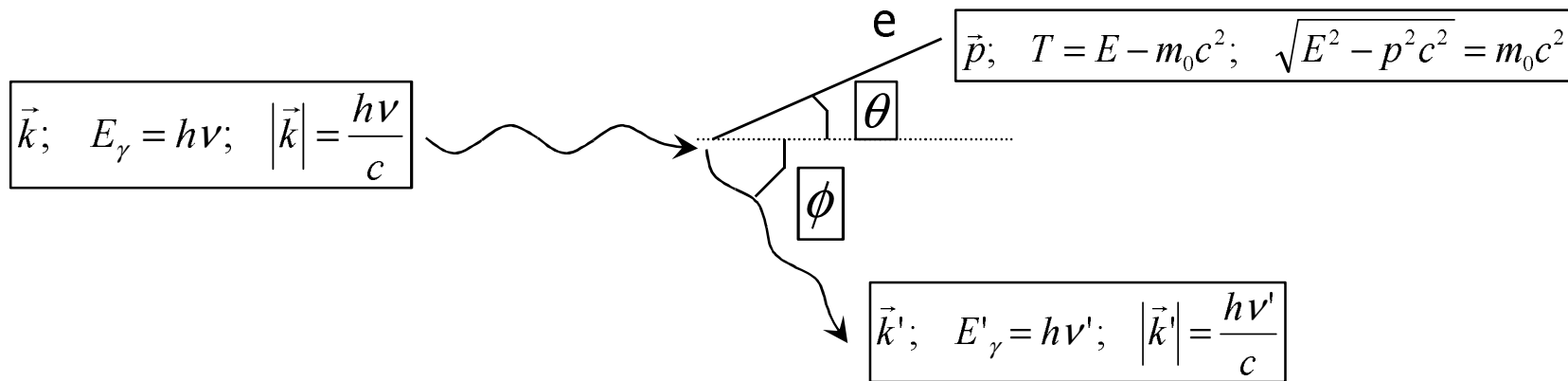


- $\sigma_{\text{p.e.}}$ = Atomic photoelectric effect (electron ejection, photon absorption)
- σ_{Rayleigh} = Rayleigh (coherent) scattering—atom neither ionized nor excited
- σ_{Compton} = Incoherent scattering (Compton scattering off an electron)
- κ_{nuc} = Pair production, nuclear field
- κ_e = Pair production, electron field
- $\sigma_{\text{g.d.r.}}$ = Photonuclear interactions, most notably the Giant Dipole Resonance [46]. In these interactions, the target nucleus is broken up.

Data from [47]; parameters for $\sigma_{\text{g.d.r.}}$ from [48]. Curves for these and other elements, compounds, and mixtures may be obtained from <http://physics.nist.gov/PhysRefData>. The photon total cross section is approximately flat for at least two decades beyond the energy range shown. Original figures courtesy J.H. Hubbell (NIST).

En el plot se observan los datos experimentales (círculos) y la suma de todas las secciones eficaces "teóricas" para C y Pb

Efecto Compton



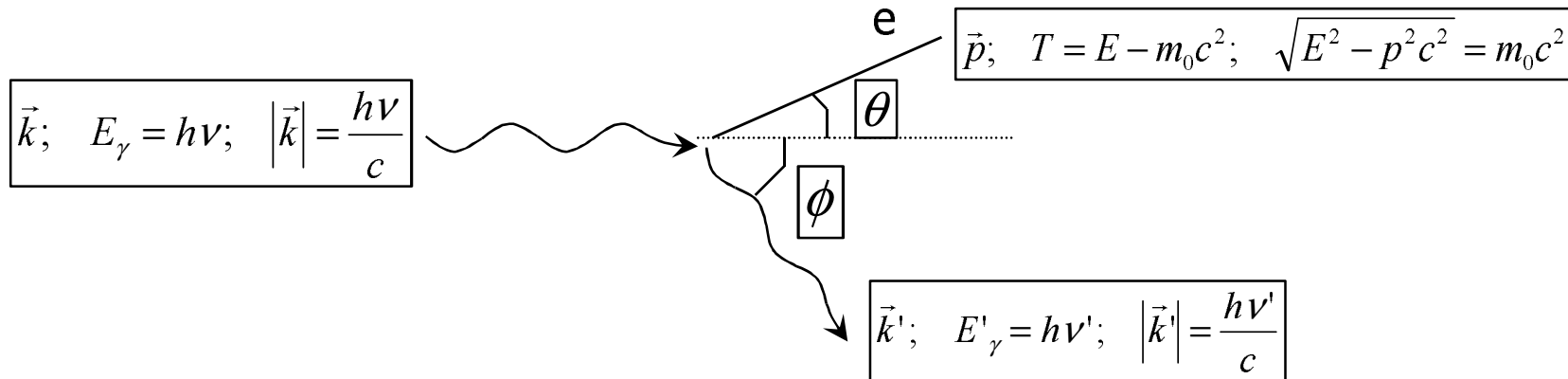
El efecto Compton tiene lugar cuando se produce la dispersión de un fotón por un electrón considerados como partículas. Inicialmente nos olvidaremos de que el electrón puede estar ligado a un átomo. Esta aproximación es incorrecta cuando Z es alto y la energía del fotón es baja (dominancia de fotoeléctrico).

En este caso el fotón incidente con momento k se supone que incide sobre un electrón en reposo que sale dispersado con ángulo θ y momento p . El fotón saliente tiene un ángulo de dispersión Φ y momento k' . Para obtener la cinemática aplicamos la conservación de energía y momento:

$$h\nu + m_0c^2 = E + h\nu'$$

$$\vec{k} = \vec{k}' + \vec{p}$$

Efecto Compton: cinemática



Por lo tanto, expresando la conservación del momento en el plano de colisión en la componente longitudinal y transversal del momento del fotón incidente:

$$T = h\nu - h\nu'$$

$$\vec{k}_\parallel \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos(\phi) + p \cos(\theta)$$

$$\vec{k}_\perp \frac{h\nu'}{c} \text{sen}(\phi) = p \text{sen}(\theta)$$

Puesto que tenemos estas tres ecuaciones y un total de cinco variables (ν , ν' , θ , ϕ , T) obtendremos toda la cinemática del proceso fijando la energía del fotón incidente $h\nu$ y el ángulo de dispersión del fotón ϕ

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2 = (T + m_0c^2)^2$$

$$(pc)^2 + (m_0c^2)^2 = T^2 + 2Tm_0c^2 + (m_0c^2)^2$$

$$(pc)^2 = T(T + 2m_0c^2)$$

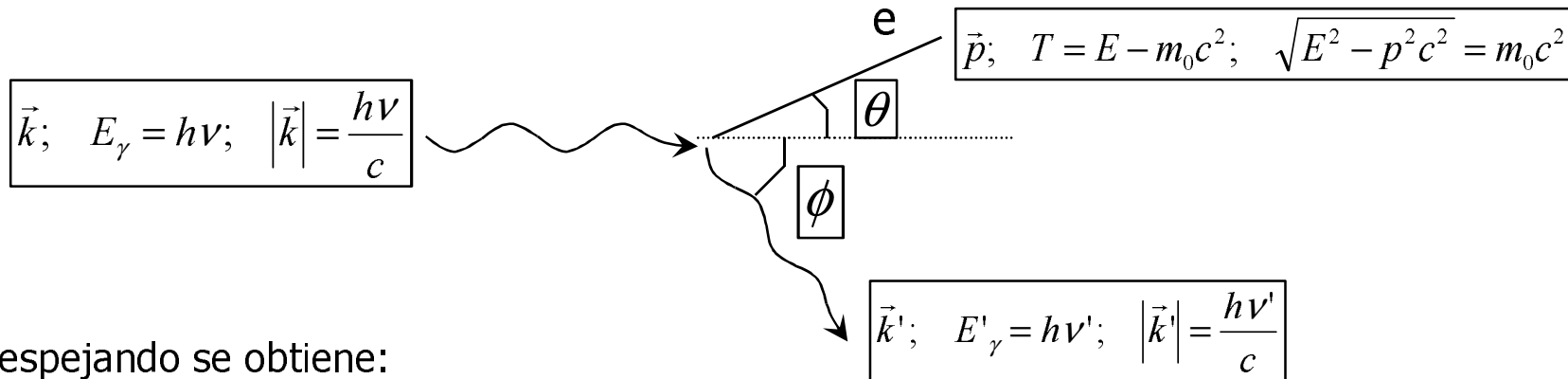
$$pc = \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}$$

$$T = h\nu - h\nu'$$

$$\vec{k}_\parallel h\nu = h\nu' \cos(\phi) + \sqrt{T(T + 2m_0c^2)} \cos(\theta)$$

$$\vec{k}_\perp h\nu' \text{sen}(\phi) = \sqrt{T(T + 2m_0c^2)} \text{sen}(\theta)$$

Efecto Compton: cinemática



Despejando se obtiene:

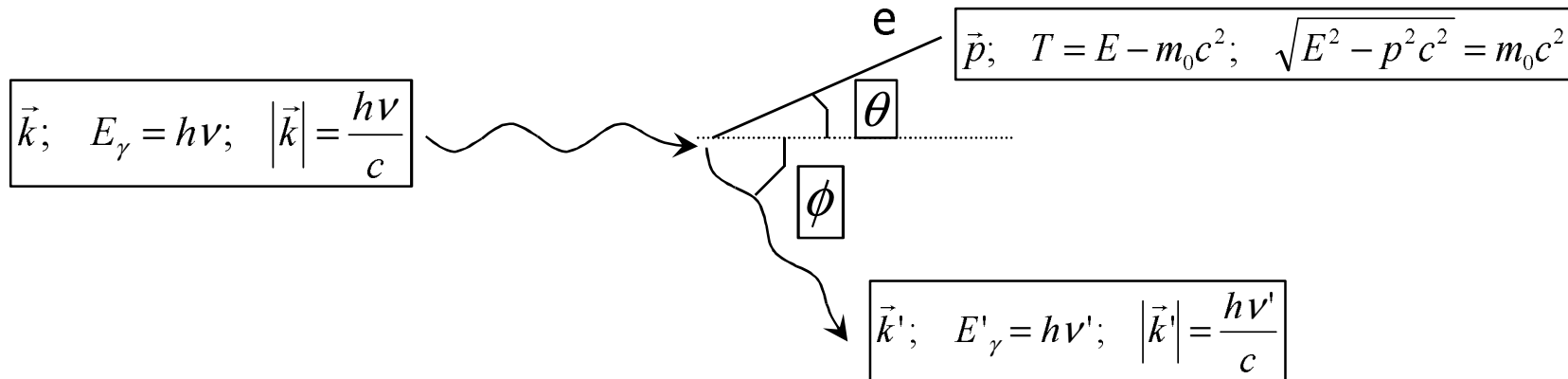
$$T = h\nu - h\nu' = \frac{\frac{h\nu}{m_0c^2}(1 - \cos(\phi))}{1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}(1 - \cos(\phi))} h\nu; \quad T_{\max}(\phi = 180^\circ) = \frac{2h\nu}{m_0c^2 + 2h\nu} h\nu; \quad T_{\min}(\phi = 0^\circ) = 0$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}(1 - \cos(\phi))}; \quad (h\nu')_{\min}(\phi = 180^\circ) = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}2}; \quad (h\nu')_{\max}(\phi = 0^\circ) = h\nu$$

$$\cot(\theta) = \left(1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}\right) \frac{1 - \cos(\phi)}{\sin(\phi)} = \left(1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Siendo $m_0c^2 = 0.511 \text{ MeV}$. Normalmente expresaremos $h\nu$, $h\nu'$ y T en MeV para usar de modo coherente las ecuaciones. Si $\phi=0$ entonces ambos fotones tienen la misma energía (es el límite de scattering Thomson, que predecía que la energía de los fotones dispersados sería la misma que la del incidente para todo ángulo).

Efecto Compton: cinemática



En el límite $h\nu \ll m_0c^2$ se obtiene

$$T = h\nu - h\nu' \xrightarrow{h\nu \ll m_0c^2} 0$$

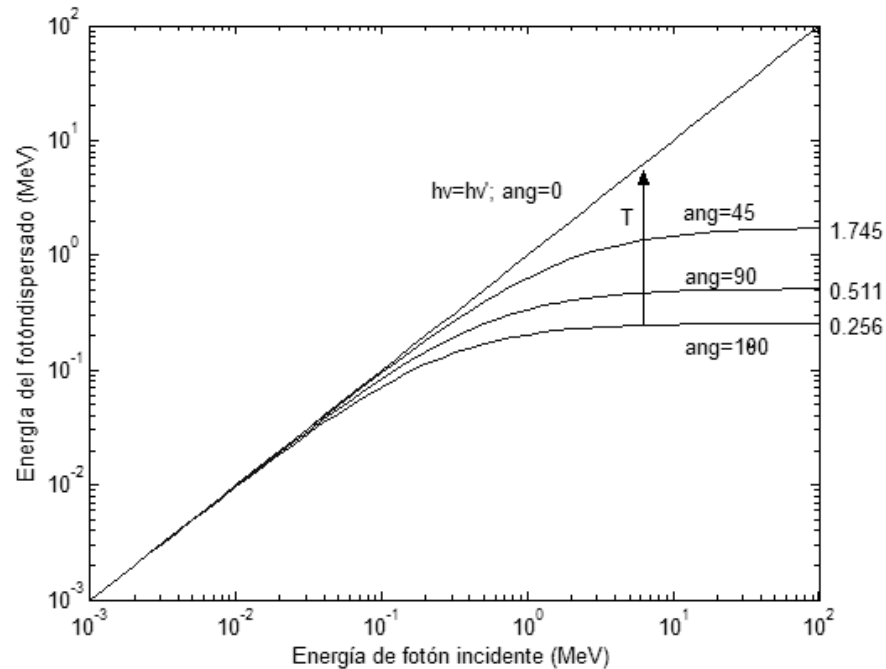
$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}(1 - \cos(\phi))} \xrightarrow{h\nu \ll m_0c^2} h\nu$$

En el límite $h\nu \gg m_0c^2$ se obtiene

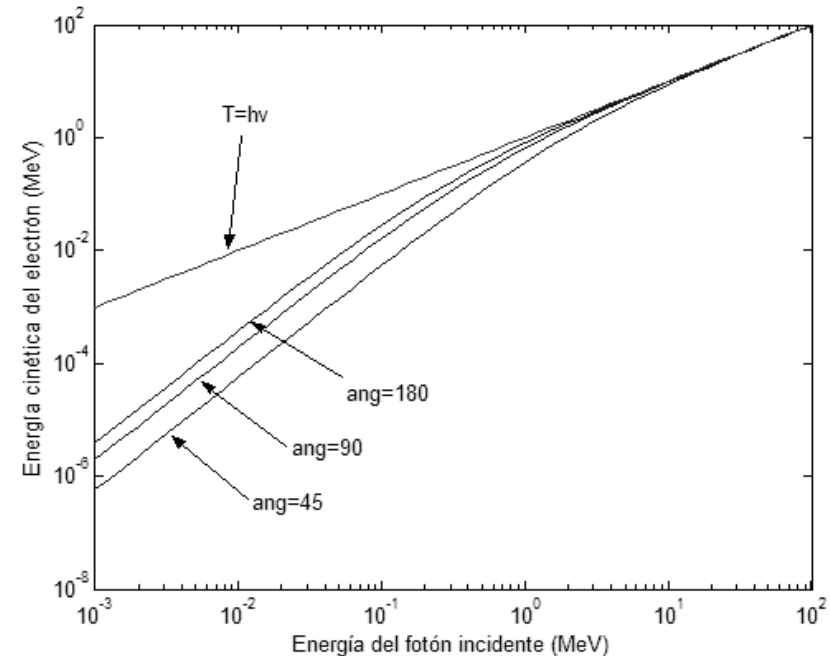
$$T = h\nu - h\nu' \xrightarrow{h\nu \gg m_0c^2} h\nu - \frac{m_0c^2}{(1 - \cos(\phi))}$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}(1 - \cos(\phi))} \xrightarrow{h\nu \gg m_0c^2} \frac{m_0c^2}{(1 - \cos(\phi))}$$

Efecto Compton: cinemática

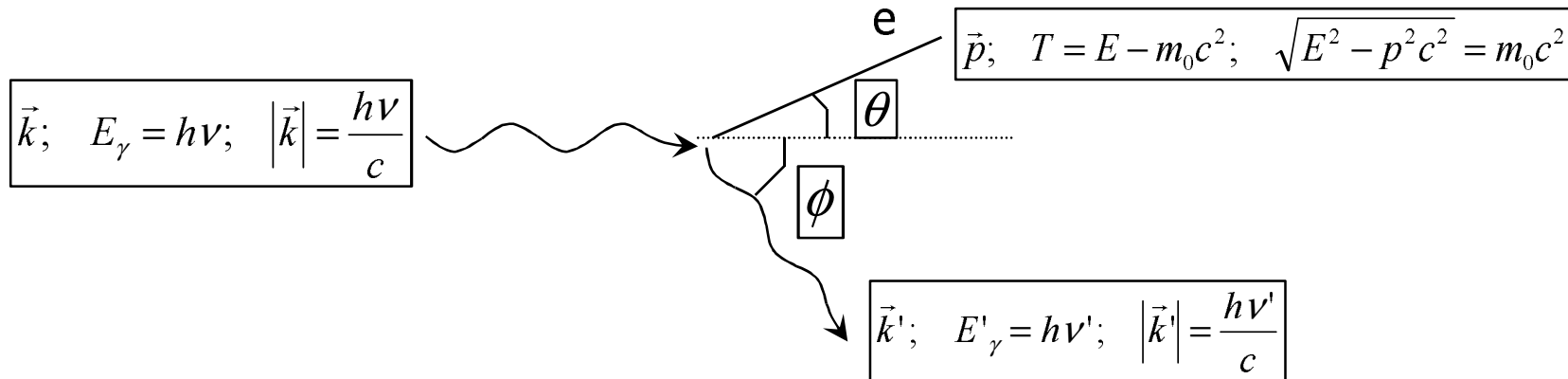


Energía de los fotones dispersados en función de la energía de los fotones incidentes. Obsérvese el comportamiento asintótico a altas energías dependiente del ángulo de dispersión. A bajas energías para todos los ángulos la energía del fotón dispersado tiende a ser igual a la del incidente. La energía cinética proporcionada al electrón es la distancia vertical desde la línea $\Phi = \text{cte}$ a la diagonal.



Energía de los electrones dispersados como función de la energía del fotón incidente para diferentes ángulos Φ de dispersión del fotón. Obsérvese que la situación por encima de 10 MeV tiende rápidamente a que el electrón se lleva casi toda la energía del fotón incidente. Por ejemplo si $h\nu = 10 \text{ MeV}$ y $\Phi = 90^\circ$, $T = 9.5 \text{ MeV}$

Efecto Compton: cinemática



En el límite $h\nu \ll m_0c^2$ se obtiene

$$\cot(\theta) = \left(1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right) \xrightarrow{h\nu \ll m_0c^2} \cot(\theta) \approx \operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad \theta = 90^\circ - \frac{\phi}{2}$$

En el límite $h\nu \gg m_0c^2$ se obtiene

$$\cot(\theta) = \left(1 + \frac{h\nu}{m_0c^2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right) \xrightarrow{h\nu \gg m_0c^2} \cot(\theta) \approx \frac{h\nu}{m_0c^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Esto significa que en un breve intervalo de Φ se obtiene un gran intervalo de θ para los electrones. Ejemplo $h\nu=500 \text{ MeV}$ $0^\circ < \Phi < 2.6^\circ$ corresponde a $2.6^\circ < \theta < 90^\circ$

Efecto Compton: cinemática

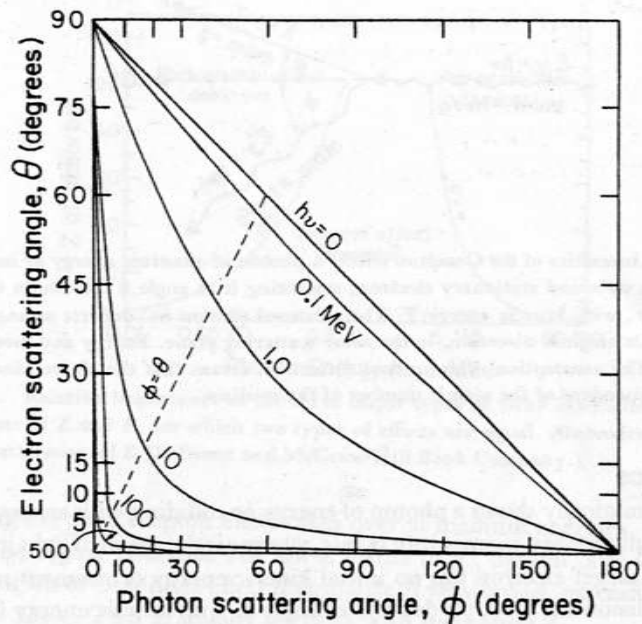
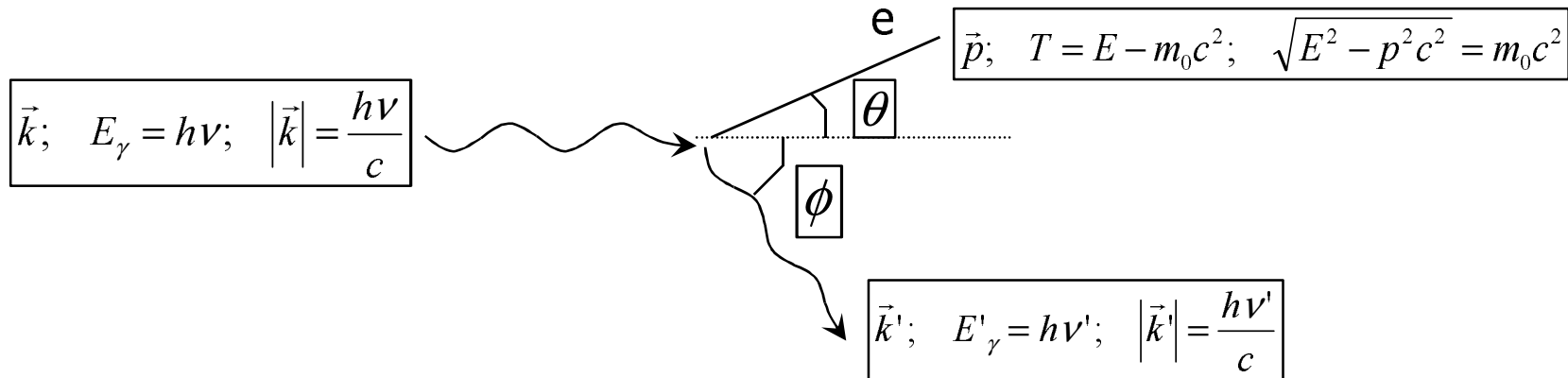
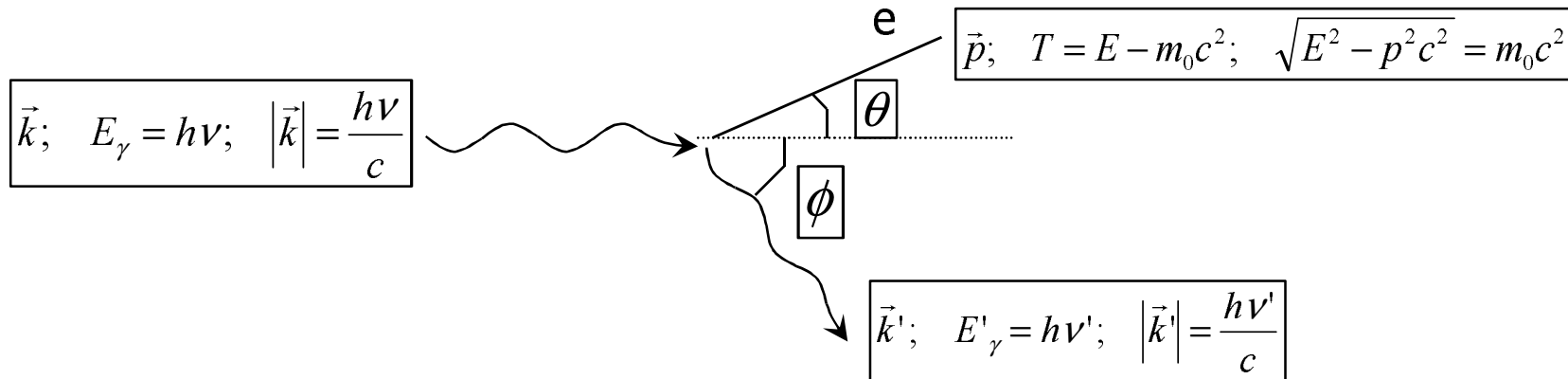


FIGURE 7.4. Relationship of the electron scattering angle θ to the photon scattering angle ϕ in the Compton effect, from Eq. (7.10). Curves are shown for the incident photon energies 0, 0.1, 1.0, 10, 100, and 500 MeV. The dashed line is the locus where $\theta = \phi$, when the electron and photon are scattered at equal angles on opposite sides of the incident photon's direction.

Relación entre el ángulo de dispersión del electrón y el ángulo de dispersión del fotón para diferentes energías del fotón incidente. Obsérvese que en el comportamiento a alta energía los fotones dispersados a bajo ángulo son los responsables de los electrones con ángulo de dispersión elevado.

Efecto Compton: cinemática



Se define el desplazamiento Compton como la diferencia de las longitudes de onda del fotón incidente y dispersado:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\nu} + \frac{h}{m_0c} (1 - \cos(\phi)) - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos(\phi))$$

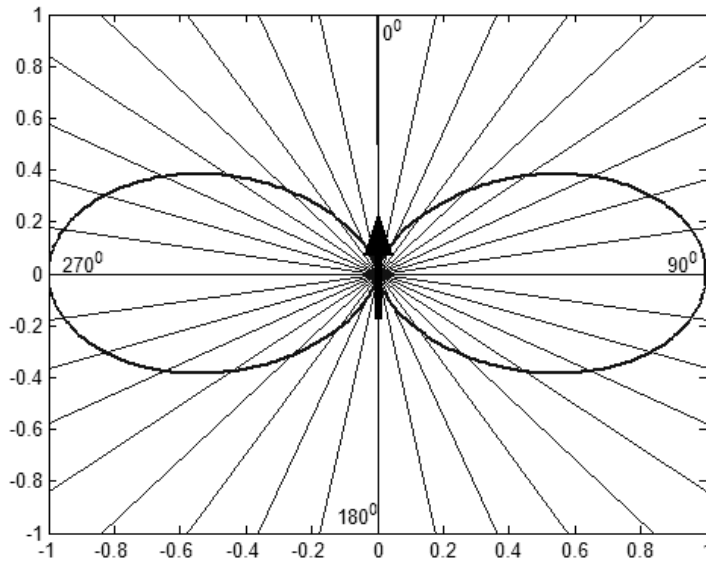
El desplazamiento Compton no depende de la energía del fotón incidente sino únicamente del ángulo de dispersión.

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c}; \quad h\nu_c = h\frac{c}{\lambda_c} = m_0c^2$$

λ_c se conoce como la longitud de onda Compton del electrón y corresponde a la longitud de onda de un fotón cuya energía es igual a la energía en reposo del electrón.

Scattering Thomson

La electrodinámica clásica predice la emisión de radiación por una carga acelerada. El flujo de radiación instantánea viene dado por el vector de Poynting. Supongamos que un electrón se acelera instantáneamente con una aceleración a , entonces el flujo de energía radiada en un punto a distancia r cuyo vector de posición forma un ángulo θ con a , viene dada por la expresión (ecuación de Larmor no relativista)



$$S = \frac{E_{\perp} B_{\perp}}{\mu_0}$$

$$S = \frac{e^2 a^2 \sin^2(\phi)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2}$$

Siendo θ el ángulo entre la aceleración instantánea y la dirección de emisión de la radiación. Si sobre el electrón incide una onda electromagnética plana, consideraremos que la fuerza electromagnética que sufre es $F=eE$, por lo tanto

Potencia radiada (diagrama polar) por una carga acelerada en el límite clásico en función del ángulo

$$E = E_0 \cos(\omega t); \quad a = \frac{eE}{m} = \frac{eE_0}{m} \cos(\omega t)$$

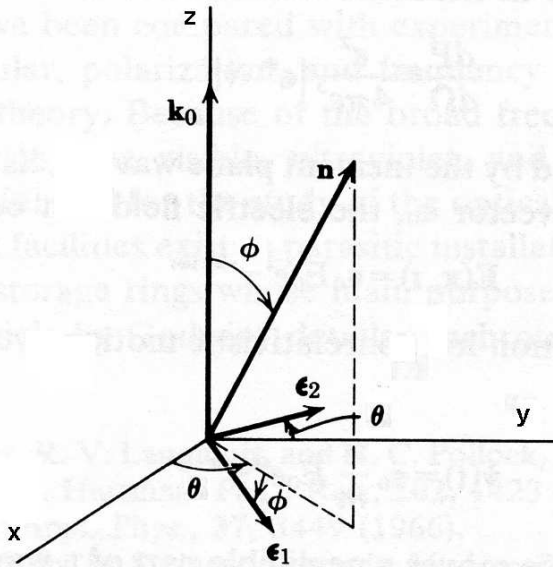
$$S = \frac{e^2 \sin^2(\phi)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{e^2 E_0^2}{m^2} \cos^2(\omega t); \quad \langle S \rangle = \frac{cE_0^2}{16\pi^2 r^2 \epsilon_0} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2(\phi) \frac{1}{2}$$

Scattering Thomson

Considerando la potencia emitida por ángulo sólido y definiendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{energía radiada por unidad de tiempo por unidad ángulo sólido}}{\text{flujo de energía incidente por unidad de área por unidad de tiempo}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 |\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}_0|^2; \quad r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$



Esquema de los vectores de la dispersión Thomson. k_0 es el momento de los fotones incidentes y ϵ_1 y ϵ_2 representan los vectores base para descomponer la polarización

En general tendremos que si la polarización incidente es paralela al eje X,

Promediando sobre las polarizaciones (sobre θ), obtendremos

Sección eficaz de scattering Thomson por una onda con polarización incidente ϵ_0 como radiación con estado de polarización ϵ . r_0 se denomina radio clásico del electrón con un valor

$$r_0 = 2.818 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 (\cos^2(\phi) \cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta))$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 (\cos^2(\phi) + 1) \frac{1}{2}$$

Scattering Thomson

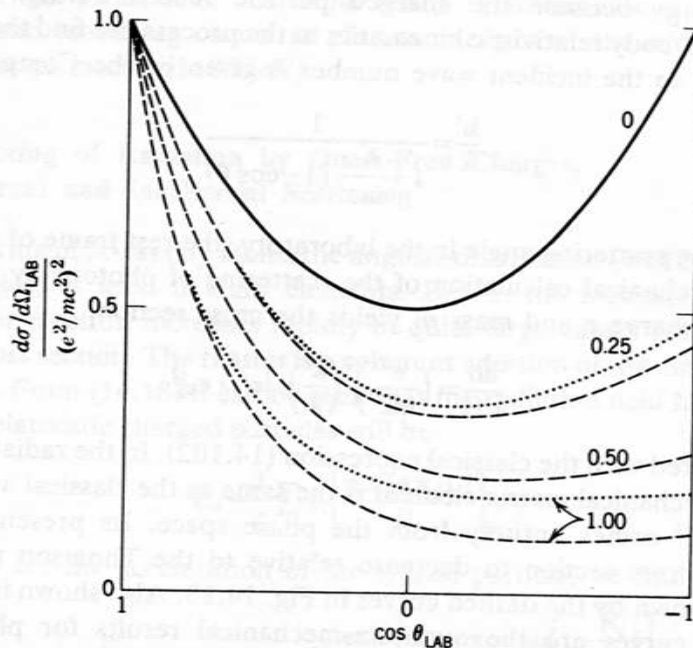


Fig. 14.13 Differential scattering cross section of unpolarized radiation by a point charged particle initially at rest in the laboratory. The solid curve is the classical Thomson result. The dashed curves are the quantum-mechanical results for a spinless particle, with the numbers giving the values of $\hbar\omega/mc^2$. For $\hbar\omega/mc^2 = 0.25, 1.0$ the dotted curves show the results for spin $\frac{1}{2}$ point particles (electrons).

Obsérvese que la aproximación Thomson falla para ángulos grandes en cuanto la energía del fotón es significativamente comparable a mc^2

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} (\cos^2(\phi) + 1)$$

La dispersión Thomson por electrones libres de una onda electromagnética plana no polarizada es simétrica atrás-delante. La sección a ángulo 0° es igual a la sección a ángulo 180° .

Podemos también calcular la sección eficaz total de scattering Thomson para fotones no polarizados,

$$\sigma_T = \int_0^\pi d\phi \, 2\pi \, \text{sen}(\phi) \, \frac{r_0^2}{2} (\cos^2(\phi) + 1) = \frac{8\pi r_0^2}{3}$$

$$\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 / \text{electrón}$$

Scattering Compton: sección eficaz K-N

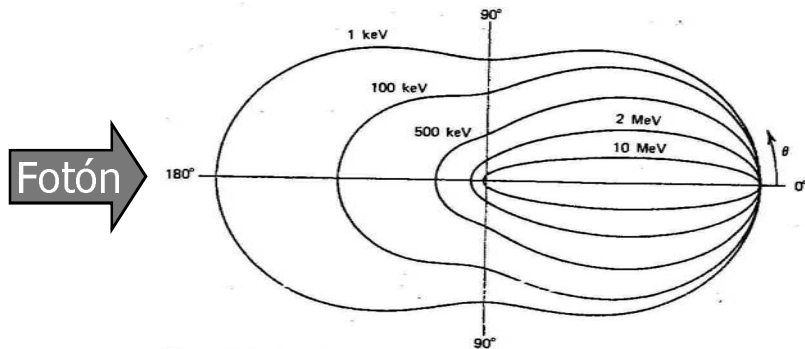
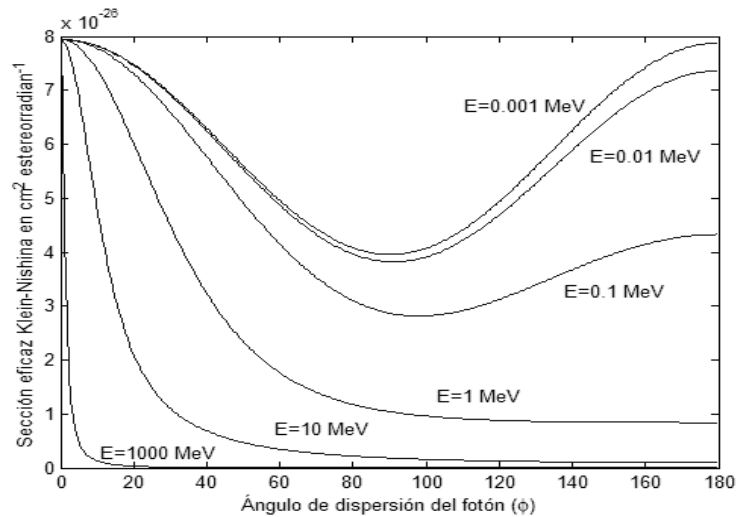


Figure 2.19 A polar plot of the number of photons (incident from the left) Compton scattered into a unit solid angle at the scattering angle θ . The curves are shown for the indicated initial energies.

Obsérvese que a altas energías el fotón dispersado tiende a salir hacia delante.

La dispersión Thomson por electrones libres no describe correctamente el comportamiento de la interacción Compton a energías elevadas:

- la sección eficaz Thomson no depende de la energía del fotón incidente (mientras que la evidencia experimental indica una disminución de la sección eficaz con la energía).
- existe una gran asimetría adelante-atrás en la interacción cuando alcanzamos energías comparables a la masa del electrón.

En 1928 Klein y Nishina aplicaron la ecuación de Dirac a la resolución del efecto Compton obteniendo la sección eficaz (K-N) diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 \left(\frac{h\nu}{h\nu'} + \frac{h\nu'}{h\nu} - \text{sen}^2(\phi) \right)$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0 c^2} (1 - \cos(\phi))}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{(1 + \cos^2(\phi))}{2} \left(\frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos(\phi))} \right)^2 \left(1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos(\phi))^2}{(1 + \cos^2(\phi))[1 + \alpha(1 - \cos(\phi))]} \right); \quad \alpha = \frac{h\nu}{m_0 c^2}$$

Scattering Compton: sección eficaz K-N

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 \left(\frac{h\nu}{h\nu'} + \frac{h\nu'}{h\nu} - \text{sen}^2(\phi) \right)$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0 c^2} (1 - \cos(\phi))}$$

La sección eficaz hacia delante (forward) K-N no es una función de la energía del fotón incidente. Este resultado es coincidente con la teoría de Thomson.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (\phi = 0) = r_0^2$$

En el límite de baja energía $h\nu \ll m_0 c^2$ podremos considerar

$$h\nu' \approx h\nu; \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} (1 + 1 - \text{sen}^2(\phi)) = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2(\phi))$$

En el límite de alta energía $h\nu \gg m_0 c^2$ podremos considerar

$$h\nu' \approx \frac{m_0 c^2}{1 - \cos(\phi)}; \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{h\nu'}{h\nu} + \left(\frac{h\nu'}{h\nu} \right)^3 - \left(\frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 \text{sen}^2(\phi) \right) \approx \frac{r_0^2}{2} \frac{h\nu'}{h\nu}$$

Esta expresión asintótica (donde está suprimida la dependencia angular) es válida excepto para ángulo de dispersión cercano a cero donde prevalece la afirmación de la sección eficaz forward. En general, para cada ángulo $\Phi=0$ podemos decir que en el límite de alta energía la sección eficaz K-N es inversamente proporcional a la energía del fotón incidente.

Scattering Compton: sección eficaz K-N

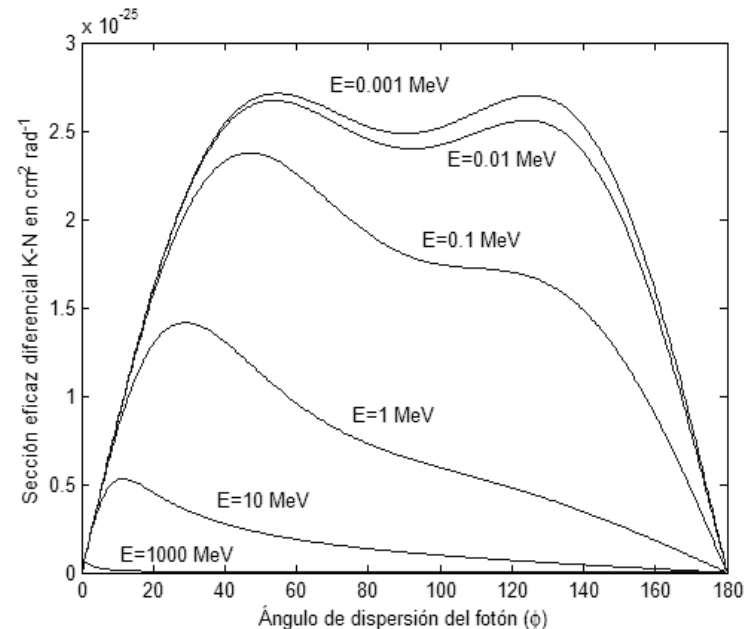
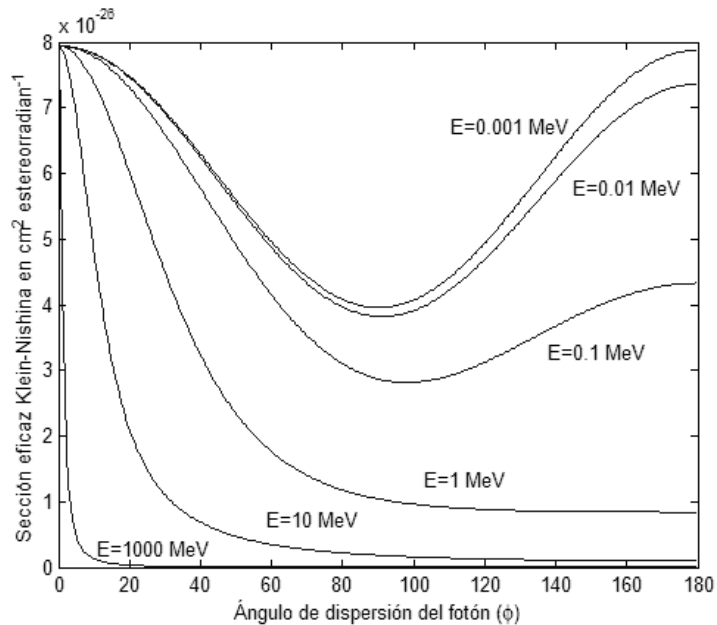
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 \left(\frac{h\nu}{h\nu'} + \frac{h\nu'}{h\nu} - \text{sen}^2(\phi) \right)$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0 c^2} (1 - \cos(\phi))}$$

Si en lugar de expresar la sección eficaz de K-N en forma diferencial por unidad de ángulo sólido la expresamos por unidad de ángulo lineal, entonces tendremos que tener en cuenta que

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d\phi} = \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \text{sen}(\phi)$$

La expresión de la sección eficaz de K-N por unidad de ángulo lineal lleva a dependencias angulares muy diferentes y ha de evitarse la confusión con la anterior.



Scattering Compton: sección eficaz K-N

De modo análogo a la sección eficaz Thomson se puede calcular la sección eficaz total K-N (que en general será menor que la de Thomson) integrando sobre el ángulo sólido

$$\sigma_e^{KN} = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin(\phi) d\phi = \int_0^\pi \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 \left(\frac{h\nu}{h\nu'} + \frac{h\nu'}{h\nu} - \sin^2(\phi) \right) 2\pi \sin(\phi) d\phi$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0 c^2} (1 - \cos(\phi))}$$

De donde se obtiene

$$\sigma_e^{KN} = 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha} - \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} \right] + \frac{\ln(1+2\alpha)}{2\alpha} - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2} \right\} \quad \alpha = \frac{h\nu}{m_0 c^2}$$

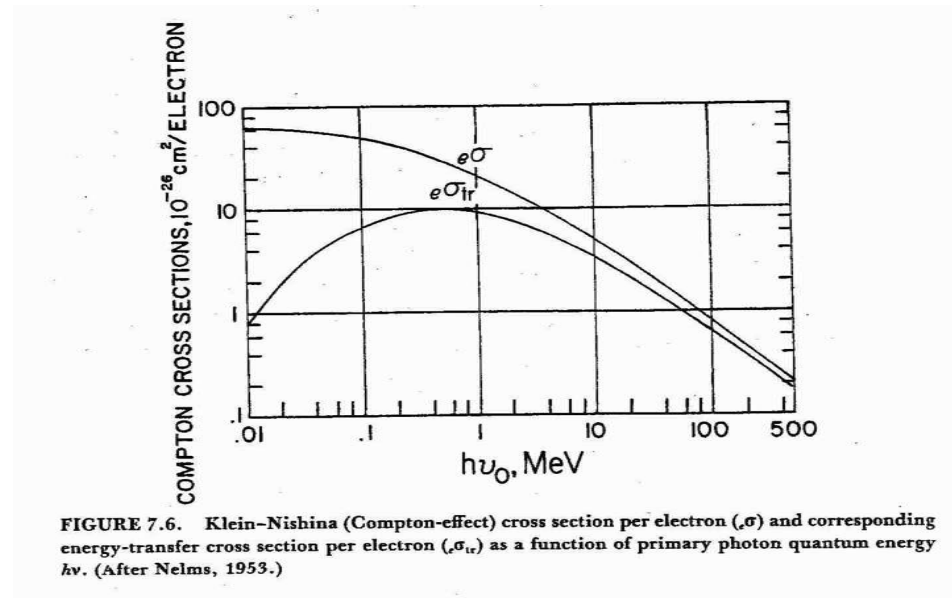


FIGURE 7.6. Klein-Nishina (Compton-effect) cross section per electron (σ) and corresponding energy-transfer cross section per electron (σ_{tr}) as a function of primary photon quantum energy $h\nu$. (After Nelms, 1953.)

Esta sección eficaz total en el límite de baja energía reproduce el valor de la sección eficaz total de la teoría de Thomson. No debemos olvidar que esta sección eficaz es la sección eficaz por electrón presente en el material de interacción. Para obtener la sección eficaz neta debemos tener en cuenta la densidad de electrones del material.

Scattering Compton

La sección eficaz Compton por átomo vendrá dada por Z veces la sección eficaz de Klein Nishina

$$\sigma_{\text{atomo}} = Z \times \sigma_e^{KN} \quad \text{cm}^2 / \text{atomo}$$

Si queremos calcular la probabilidad de interacción por unidad de longitud o el coeficiente de atenuación Compton tendremos que tener en cuenta el número de átomos por unidad de volumen

$$\text{densidad de electrones (electrones cm}^{-3}\text{)} = \rho \frac{N_A Z}{A}$$

ρ es la densidad de masa del material (g cm^{-3})

Z es el número de electrones por átomo (o de electrones por molécula)

A es la masa en gramos de un mol de átomos (o por mol de moléculas)

N_A es el número de Avogadro $6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$$\sigma = \rho \frac{N_A Z}{A} \sigma_e^{KN} \quad (\text{cm}^{-1})$$

Es el coeficiente de atenuación Compton en el material

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{N_A Z}{A} \sigma_e^{KN} \quad (\text{cm}^2 / \text{g})$$

Es el coeficiente de atenuación másico Compton en el material

Scattering Compton

$$\sigma_e^{KN} = 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha} - \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} \right] + \frac{\ln(1+2\alpha)}{2\alpha} - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2} \right\} \quad \alpha = \frac{h\nu}{m_0c^2}$$

$$\sigma_{atomo} = Z \times \sigma_e^{KN} \quad cm^2 / atomo$$

$$\sigma = \rho \frac{N_A Z}{A} \sigma_e^{KN} \quad (cm^{-1})$$

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{1.98 + 0.0155 A^{2/3}}$$

- La sección eficaz Compton por electrón se comporta como Z^0 (no depende de Z)
- La sección eficaz Compton por átomo se comporta como Z^1
- La sección eficaz Compton se comporta como Z/A (en la práctica con una escasa dependencia de Z, tendiendo a disminuir cuando aumenta Z) (dependemos más de la densidad!!)

En general la sección eficaz atómica dependerá en Z con una potencia superior en una unidad a las otras dos para todos los procesos en consideración.

Scattering Compton: sección eficaz para e-

Hasta ahora hemos escrito la sección eficaz diferencial para el proceso en función del ángulo de dispersión del fotón. Podemos igualmente plantearnos cuál es la sección eficaz diferencial para el electrón

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \text{Sección eficaz diferencial por e- y unidad de ángulo sólido } d\Omega \text{ para un fotón dispersado entre } \Phi \text{ y } \Phi+d\Phi}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega'} \equiv \text{Sección eficaz diferencial por e- y unidad de ángulo sólido } d\Omega' \text{ para un fotón dispersado entre } \theta \text{ y } \theta+d\theta}$$

Puesto que cada electrón dispersado un ángulo θ se corresponde con un fotón dispersado un ángulo Φ

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \text{ sen}(\phi) d\phi = \frac{d\sigma}{d\Omega'} 2\pi \text{ sen}(\theta) d\theta}$$

De donde

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \left| \frac{\text{sen}(\phi) d\phi}{\text{sen}(\theta) d\theta} \right| = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{4(1+\alpha)^2 \cot(\theta)}{\left[(1+\alpha)^2 + \cot^2(\theta) \right]^2 \text{sen}^3(\theta)}$$

Scattering Compton: sección eficaz para e-

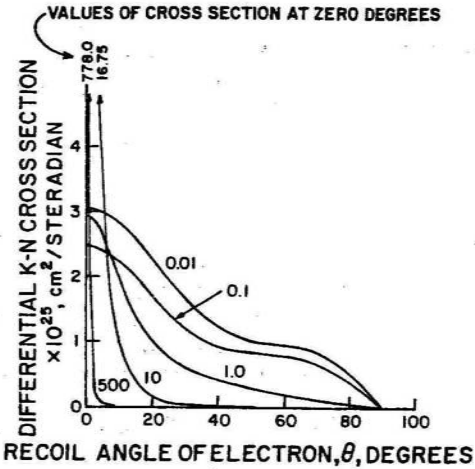


FIGURE 7.8. Differential Klein-Nishina cross section $d\sigma/d\Omega_e$, vs angle θ of the scattered electron for $h\nu = 0.01, 0.1, 1, 10,$ and 500 MeV. This shows the angular distribution, per unit solid angle, of the recoil electrons resulting from the Compton effect. (After Nelms, 1953.)

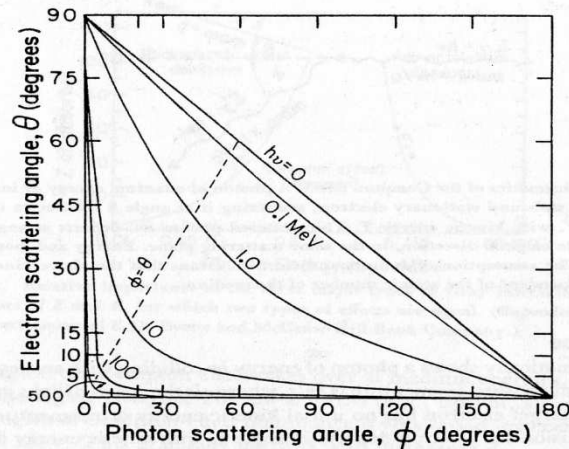


FIGURE 7.4. Relationship of the electron scattering angle θ to the photon scattering angle ϕ in the Compton effect, from Eq. (7.10). Curves are shown for the incident photon energies $0, 0.1, 1.0, 10, 100,$ and 500 MeV. The dashed line is the locus where $\theta = \phi$, when the electron and photon are scattered at equal angles on opposite sides of the incident photon's direction.

La sección eficaz para electrones en función de su ángulo de dispersión tiende a cero (para todas las energías) cuando θ tiende a 90°

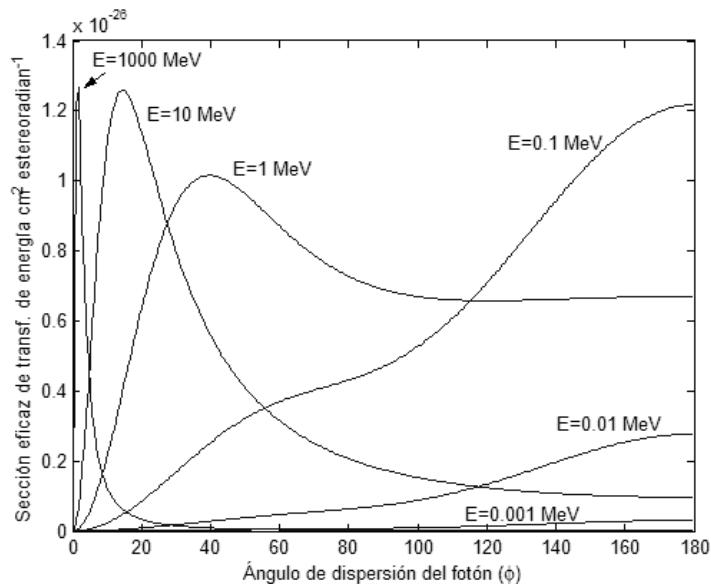
Se aprecia que cuando crece la energía del fotón incidente el electrón tiende a salir dispersado a muy bajo ángulo. Obsérvese que a alta energía un amplio intervalo de ángulos de dispersión del fotón está asociado con ángulos de dispersión muy pequeños para el electrón.

Sección eficaz de transferencia de energía

Otro de los aspectos relevantes del efecto Compton es cómo se transfiere la energía del fotón a la energía cinética del electrón, para ello consideramos la sección eficaz de K-N multiplicada por la fracción de energía transferida para cada ángulo

$$\frac{d\sigma_e^{tr}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_e}{d\Omega} \cdot \frac{T}{h\nu} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 \left(\frac{h\nu}{h\nu'} + \frac{h\nu'}{h\nu} - \text{sen}^2(\phi) \right) \frac{T}{h\nu} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 \left(\frac{h\nu}{h\nu'} + \frac{h\nu'}{h\nu} - \text{sen}^2(\phi) \right) \frac{(h\nu - h\nu')}{h\nu}$$

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_0c^2} (1 - \cos(\phi))}$$



El valor promedio de la energía del fotón que se transfiere al electrón mediante la interacción Compton viene dado por

$$\frac{\bar{T}}{h\nu} = \frac{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{T}{h\nu} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} = \frac{\int \frac{d\sigma^{tr}}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} = \frac{\sigma_e^{tr}}{\sigma_e}$$

$$\sigma_e^{tr} = 2\pi r_0^2 \left[\frac{2(1+\alpha)^2}{\alpha^2(1+2\alpha)} - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2} - \frac{(1+\alpha)(2\alpha^2-2\alpha-1)}{\alpha^2(1+2\alpha)^2} - \frac{4\alpha^2}{3(1+2\alpha)^3} - \left(\frac{1+\alpha}{\alpha^3} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^3} \right) \ln(1+2\alpha) \right]$$

$$\alpha = \frac{h\nu}{m_0c^2}$$

Sección eficaz de transferencia de energía

Al dividir la sección eficaz total de transferencia de energía por la sección eficaz total de K-N obtenemos la fracción de energía transferida promedio. Para energías bajas el fotón apenas pierde energía y en el límite de muy alta energía el fotón tiende a perder la mayor parte de su energía en la colisión. Cuando $E=1.6$ MeV $T/h\nu=0.5$ mientras que para $E=100$ MeV $T/h\nu=0.8$

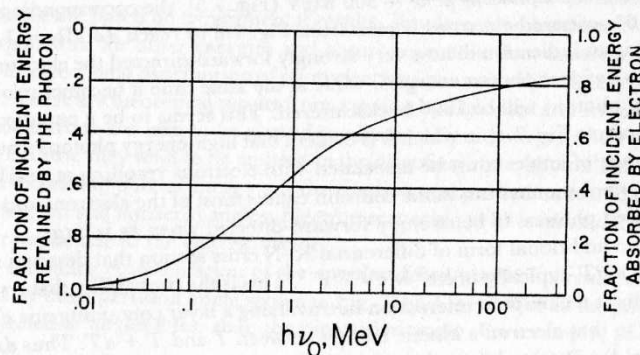


FIGURE 7.7. Mean fraction ($\bar{T}/h\nu$) of the incident photon's energy given to the recoiling electron in Compton interactions, averaged over all angles (right ordinate). Also, mean fraction ($h\nu'/h\nu$) of energy retained by the scattered photon (left ordinate).

El valor promedio de la energía del electrón mediante la interacción Compton viene dado por

$$\bar{T} = \frac{\sigma_e^{tr}}{\sigma_e} h\nu$$

La sección eficaz de transferencia σ_e^{tr} multiplicada por la fluencia de energía representa la fracción de ésta que se transfiere a energía de los electrones en una capa con 1 e/cm². Podemos incluso separar las componentes que corresponden a energía transferida a electrones y a energía transportada por los fotones dispersados

$$\sigma_e^{KN} = \sigma_e^{tr} + \sigma_e^s$$

Sección eficaz de transferencia de energía

La contribución del efecto Compton al coeficiente de atenuación másico de transferencia de energía se puede evaluar análogamente como

$$\boxed{\frac{\sigma^{tr}}{\rho} = \frac{N_A Z}{A} \sigma_e^{tr}} \quad \text{en cm}^2/\text{g}$$

Este término es una de las contribuciones a μ_{tr} de las diferentes interacciones, tendremos también la correspondiente contribución del efecto fotoeléctrico, producción de pares, etc.

La última sección eficaz de interés se refiere a la distribución de energía cinética de los electrones en el proceso Compton. Hasta ahora hemos usado el ángulo de dispersión del fotón como variable independiente para describir la sección eficaz de K-N. Sin embargo en la mayor parte de los procesos de detección la sección eficaz más pertinente es

$$\boxed{\frac{d\sigma_e}{dT}}$$

Sección eficaz diferencial correspondiente a un electrón con energía cinética de retroceso entre T y $T+dT$. Corresponde a la probabilidad de que en la interacción el electrón adquiriera una energía entre T y $T+dT$

Sección eficaz Compton

Podemos expresar la sección eficaz del proceso respecto a la energía cinética del electrón teniendo en cuenta que

$$\frac{d\sigma_e}{dT} = \frac{d\sigma_e}{d\phi} \frac{d\phi}{dT}$$

Donde el factor se obtiene de las ecuaciones de cinemática del proceso Compton. Esta sección eficaz se puede escribir

$$\frac{d\sigma_e}{dT} = \pi r_0^2 m_0 c^2 \left\{ \left(\frac{m_0 c^2 T}{(h\nu')^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{h\nu'}{h\nu} \right)^2 + \frac{h\nu'}{(h\nu)^3} [(T - m_0 c^2)^2 - (m_0 c^2)^2] \right\}$$

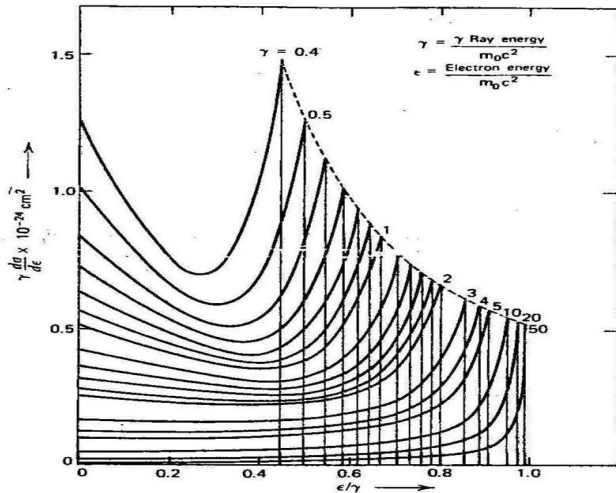


Figure 10.1 Shape of the Compton continuum for various gamma-ray energies. (From S. M. Shafroth (ed.), *Scintillation Spectroscopy of Gamma Radiation*. Copyright 1964 by Gordon & Breach, Inc. By permission of the publisher.)

Recordemos que por cinemática, la energía máxima que puede adquirir el electrón es

$$\frac{T_{\max}}{h\nu} (\phi = 180^\circ) = \frac{2h\nu}{m_0 c^2 + 2h\nu}$$

A alta energía la mayor parte de los electrones tienen una energía cercana a la energía máxima que tiende a ser $h\nu - 0.255$ MeV con un ángulo de scatter pequeño θ (cercano a cero)

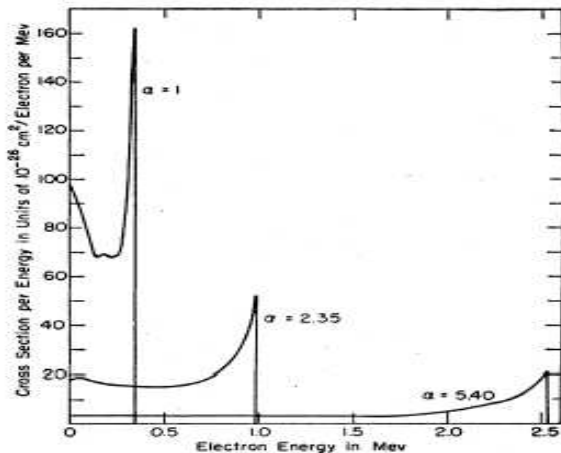
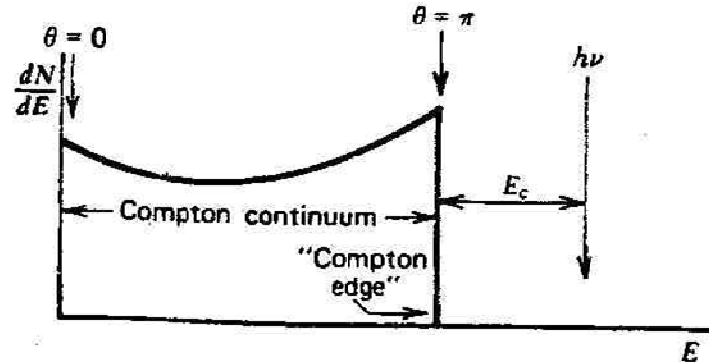


FIG. 49. Compton effect. Differential cross section per unit energy for the number of electrons scattered with the energy $E_{e,t}$ (or the number of photons scattered with the energy $h\nu' = h\nu - E_{e,t}$)

Borde de Compton

En los procesos de detección gamma es habitual, si el volumen de detector no es lo bastante grande que haya una cierta probabilidad de escape del fotón cuando sufre interacción Compton. En este caso una fuente monocromática de fotones gamma produce un espectro de señales asociadas a los electrones Compton frenados en el medio de detección.



$$T_{\max} = \frac{2h\nu}{m_0c^2 + 2h\nu} h\nu \longrightarrow h\nu - \frac{m_0c^2}{2}$$

La distancia del borde de Compton al fotopico de absorción completa (normalmente fotoeléctrico) tiende a ser 1/2 de la masa del electrón. En el caso de energías por encima de 1.022 MeV además se puede producir creación de pares y un pico de escape asociado.

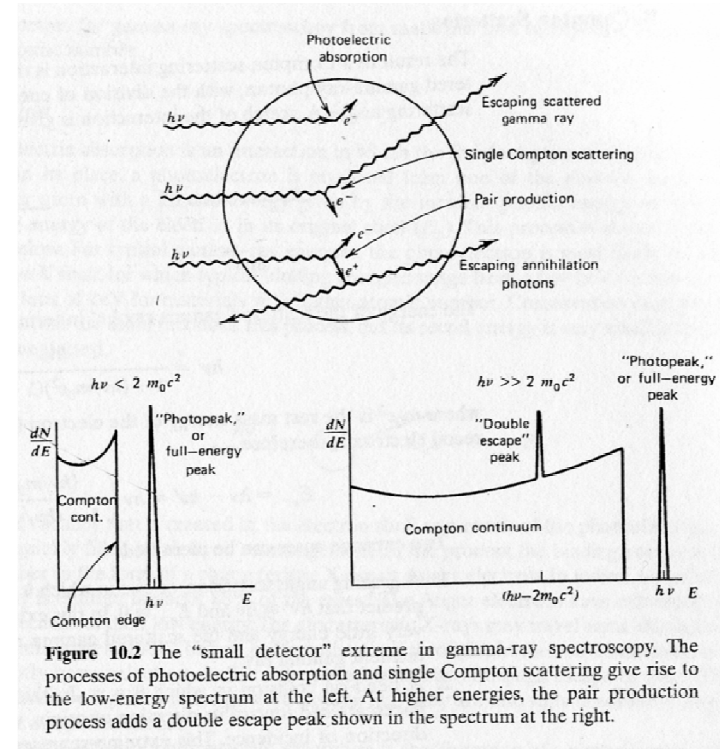


Figure 10.2 The “small detector” extreme in gamma-ray spectroscopy. The processes of photoelectric absorption and single Compton scattering give rise to the low-energy spectrum at the left. At higher energies, the pair production process adds a double escape peak shown in the spectrum at the right.

Correcciones a la sección eficaz K-N

En general las correcciones a K-N sólo son relevantes a bajas energías. Cuando el momento transferido al electrón es muy pequeño éste puede seguir ligado al átomo. Para ello (Hubbell, 1975) se calcula la probabilidad de escape de un electrón ligado $S(x,Z)$

$$p = \sqrt{\left(\frac{hv}{c}\right)^2 + \left(\frac{hv'}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{hv}{c}\right)\left(\frac{hv'}{c}\right)\cos(\phi)} \approx \frac{2hv}{c} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = 2h \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\lambda} = 2hx$$

$$x = \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\lambda}$$

La sección eficaz de producción Compton será

$$\sigma_e^C = \int_0^\pi \frac{d\sigma_e^{KN}}{d\Omega} S(x, Z) 2\pi \sin(\phi) d\phi$$

En la Figura la curva 1 corresponde al scattering Thomson, la curva 2 es el modelo K-N y la curva 3 representa la sección eficaz K-N corregida por la ligadura atómica. La curva 4 es el scattering coherente o Rayleigh.

En el cálculo de la sección eficaz de Klein-Nishina se asume que el electrón interacciona con el fotón incidente en reposo. Brusa et al. NIMA 379 167-175 "Fast sampling algorithm for the simulation of photon Compton scattering" han desarrollado el cálculo de la sección eficaz cuando el electrón está ligado en una capa atómica con un cierto momento (i.e. no está en reposo). El efecto es muy relevante a baja energía (< 10 keV) ya que la sección eficaz es considerablemente menor que la de K-N. (Y. Namito and H. Hirayama. Improvement of low energy photon transport calculation by EGS4 – electron bound effect in Compton scattering. *Japan Atomic Energy Society, Osaka*, page 401, 1991)

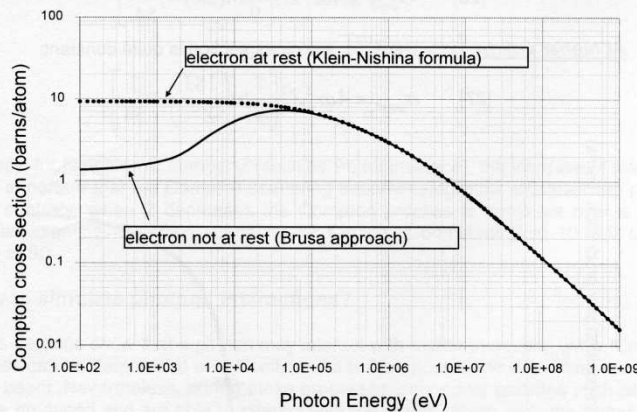
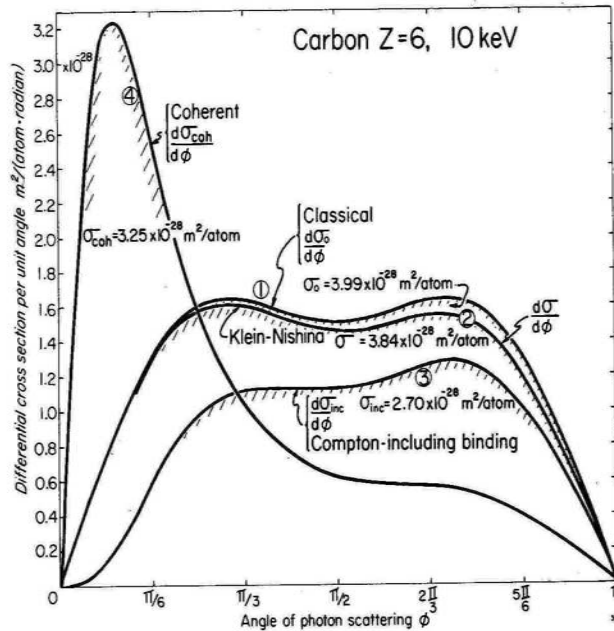
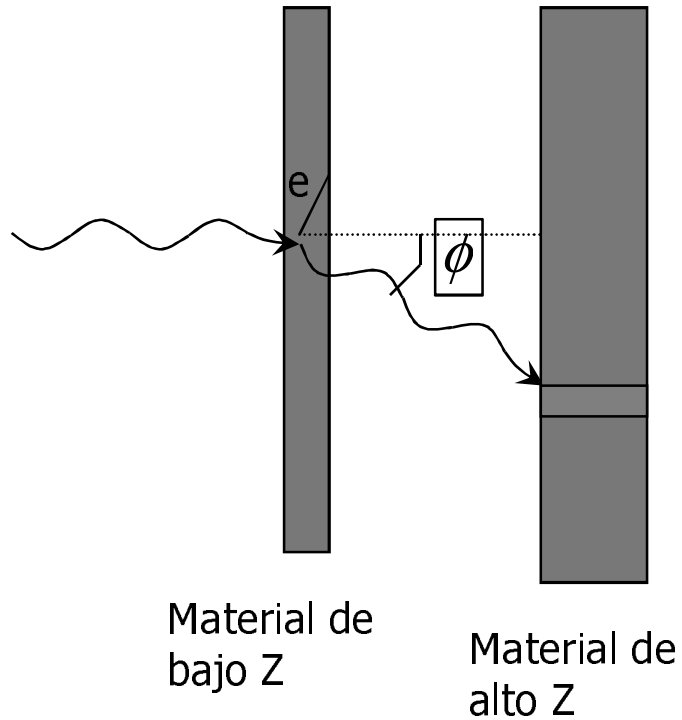


Fig. 7 – Compton scattering cross section for silicon (Z=14). The dot line represents the Klein-Nishina formula (equation 24). The solid curve accounts for the target electron motion.

Cámara Compton

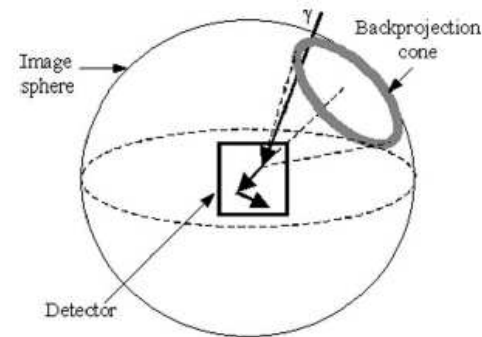
Otro de los problemas asociados a la detección gamma es la dificultad de poder asignar una dirección al fotón incidente incluso cuando la detección es positiva. Una de las técnicas que se viene desarrollando a lo largo de los últimos años es el uso del proceso Compton para obtener lo que se suele denominar "colimación electrónica" de los fotones.

La detección de una cámara Compton está basada en el uso de dos detectores: uno de bajo Z donde se detecta el electrón reconstruyendo su energía y posición de producción y otro de alto Z donde se detecta el fotón dispersado.



$$\cos(\phi) = 1 - m_0 c^2 \left(\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu' + T} \right)$$

En términos de reconstrucción, asociado a cada suceso tenemos un cono de semiángulo Φ donde podemos localizar la fuente.



Cámara Compton

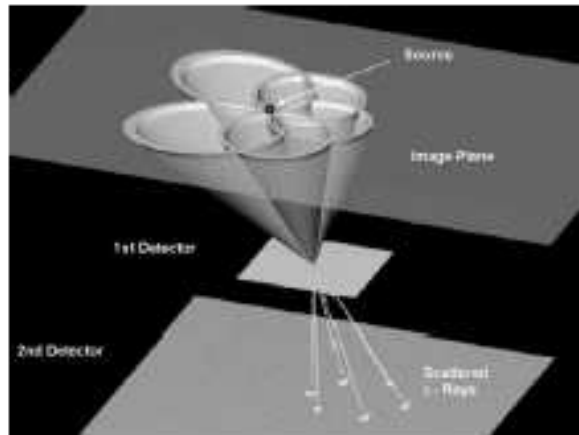


Fig. 1. Electronic collimation. The schematic drawing represents the reconstruction of a point gamma source. Cones are determined from the interaction positions in both detectors and the measured energy of the scattered electron.

Ejemplo de Cámara Compton basada en un detector de píxeles de silicio y un calorímetro para el fotón dispersado usando centelleador y fotomultiplicadores.

Una de las aplicaciones clínicas perseguidas actualmente es el desarrollo de sensores para detección de cáncer de próstata o la colimación electrónica de detección gamma.



Fig. 2. Photograph of a silicon module. A 500 µm thick, 256-pad silicon sensor (top) is bonded to a set of two VTAGP3 ASICs. The hybrid measures 5.9 × 4.8 cm² and the sensor 4.5 × 1.1 cm².

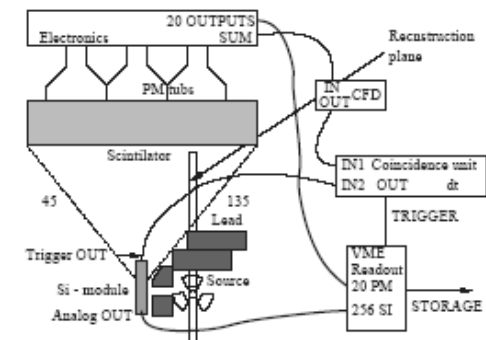
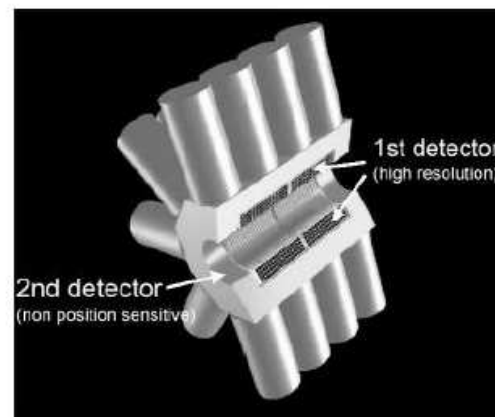
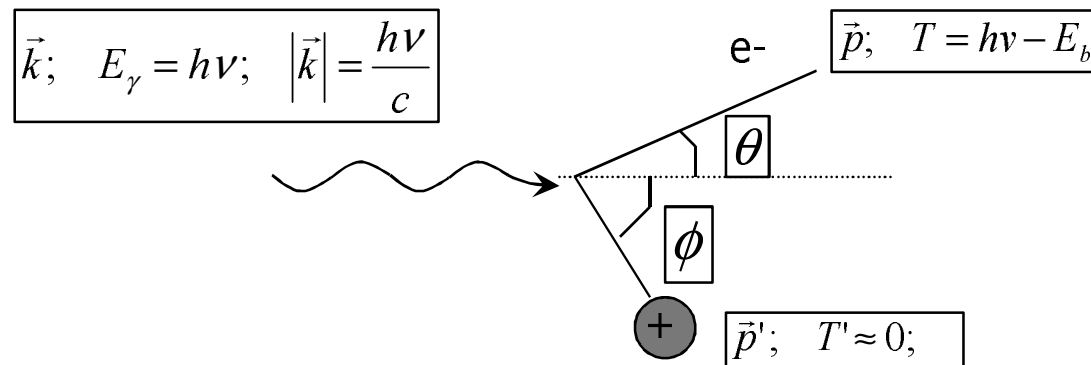


Fig. 9. Schematic drawing of the coincidence set-up.

Efecto fotoeléctrico

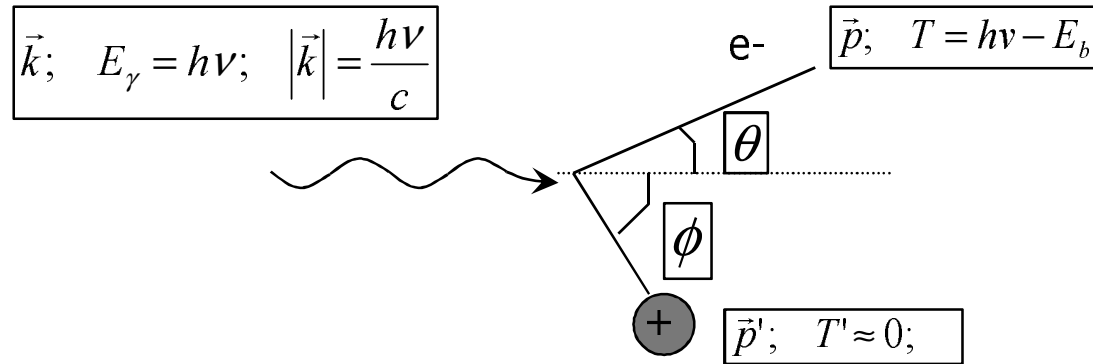
El efecto fotoeléctrico consiste en la absorción completa de un fotón por un electrón extraído del átomo, normalmente denominado *fotoelectrón*. El proceso tiene lugar si la energía del fotón supera la energía de ligadura del electrón dentro del átomo, éste será emitido con una energía cinética iguala a $h\nu - E_b$ siendo E_b la energía de ligadura del electrón, dejando una vacante en el átomo. Obsérvese que aunque el átomo no juega ningún papel relevante en el balance de energía, su momento lineal es significativo para la conservación del momento en la absorción.



Se forma entonces un ión positivo cuya estructura de niveles electrónicos tiene una vacante que se puede llenar mediante la emisión de rayos X característicos o bien por una cascada de electrones Auger. Es habitual por tanto que el efecto fotoeléctrico vaya acompañado por estos procesos.

Las secciones eficaces se pueden encontrar en <http://www-nds.iaea.org/epdl97/> y corresponden a LLNL Evaluated Photon Data Library. También se pueden encontrar en <http://physics.nist.gov/cgi-bin/Xcom>

Efecto fotoeléctrico



La energía de ligadura del electrón depende del nivel atómico (K, L, M,...) en el que se encuentra.

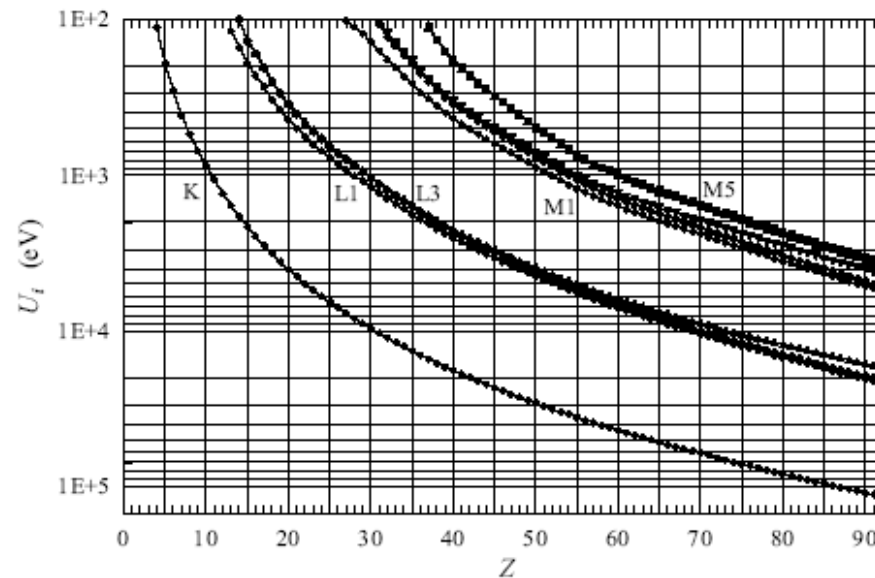
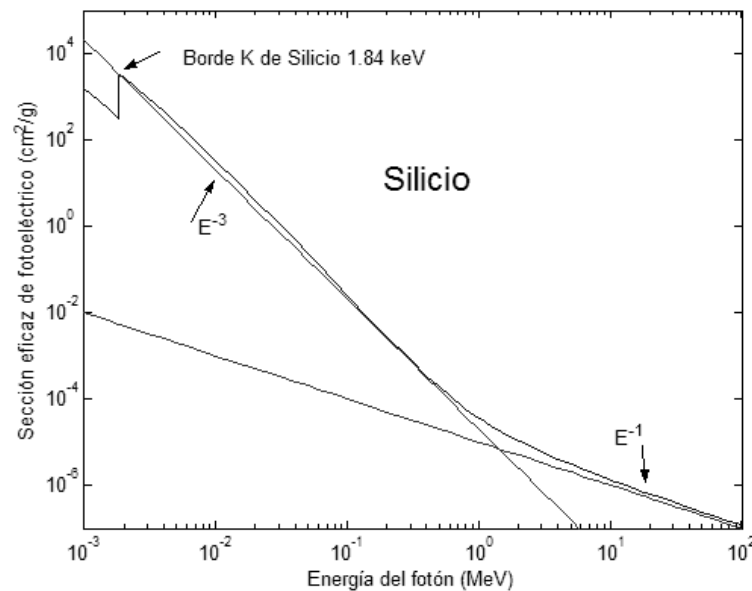


Figure 2.4: Ionization energies of the innermost shells of free atoms, as given by Lederer and Shirley (1978).

Efecto fotoeléctrico: sección eficaz

La obtención de una sección eficaz exhaustiva para el efecto fotoeléctrico es una tarea compleja, en primer lugar por el hecho intrínseco de que el cálculo debe tener en cuenta el estado ligado del electrón, produciendo diferentes contribuciones según el nivel atómico. Además existe una marcada dependencia energética en el comportamiento del proceso. Los primeros cálculos a baja energía fueron desarrollados por Kramers (1923) mediante un formalismo no-relativista para electrones de la capa K obteniendo



$$\tau_a = \left[G \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} r_0^2 \right] \alpha^3 Z^4 \left(\frac{m_0 c^2}{h\nu} \right)^3;$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}; \quad r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2}$$

Donde alpha es la constante de estructura fina, aproximadamente 1/137, r_0 es el radio clásico del electrón y G una constante del orden de la unidad. El primer término entre corchetes es aproximadamente 7 veces la sección eficaz Thomson. El subíndice a indica sección eficaz atómica.

El aspecto más relevante de esta sección eficaz es su rápido crecimiento para baja energía del fotón (como $1/E^3$)

$$\sigma_T = \frac{8\pi r_0^2}{3} = 0.665 \text{ barn}$$

Efecto fotoeléctrico: sección eficaz

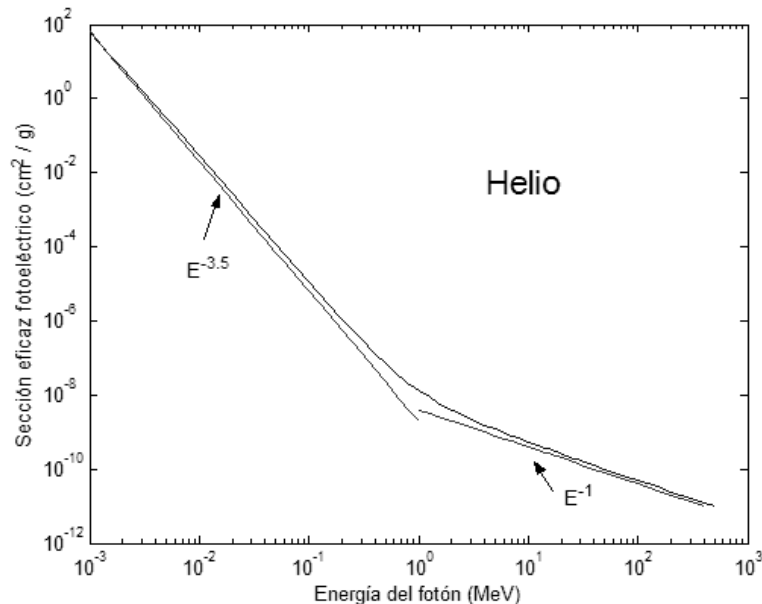
El comportamiento de la sección eficaz con la energía es claramente diferente por encima y por debajo de 0.5 MeV. En esta región de energías ($E > 0.5$ MeV) el comportamiento del electrón es relativista. Entre los primeros cálculos para la absorción de fotones por electrones en la capa K está el de H.Hall, Rev. Mod. Phys. 8, 358 (1936)

$h\nu < 0.5$ MeV

$$\tau_a \approx 4\sqrt{2} \alpha^4 Z^5 \left(\frac{8\pi r_0^2}{3} \right) \left(\frac{m_0 c^2}{h\nu} \right)^{7/2} = 1.02 \cdot 10^{-9} \times \frac{Z^5}{(h\nu)^{3.5}} \text{ (barn)}$$

$h\nu > 0.5$ MeV

$$\tau_a \approx \frac{3}{2} \alpha^4 Z^5 \left(\frac{8\pi r_0^2}{3} \right) \left(\frac{m_0 c^2}{h\nu} \right) = 1.45 \cdot 10^{-9} \times \frac{Z^5}{h\nu} \text{ (barn)}$$



Se entiende en la expresión de la derecha que $h\nu$ se expresa en MeV. Estas fórmulas son sólo aproximadas para la absorción por efecto fotoeléctrico. En la situación relativista la sección eficaz decrece inversamente proporcional a la energía $h\nu$ del fotón. El primer término entre paréntesis corresponde a la sección eficaz Thomson.

Cuando la energía del fotón se acerca a la energía de ligadura, es necesario introducir factores de corrección (Stobbe)

$$\tau_a \approx f(\xi) \times 1.02 \cdot 10^{-9} \times \frac{Z^5}{(h\nu)^{3.5}} \text{ (barn)}$$

$$f(\xi) = 2\pi \left[\frac{E_B}{h\nu} \right] \frac{\exp(-4\xi \operatorname{atan}(1/\xi))}{1 - \exp(-2\pi\xi)}; \quad \xi = \sqrt{\frac{E_B}{h\nu - E_B}}$$

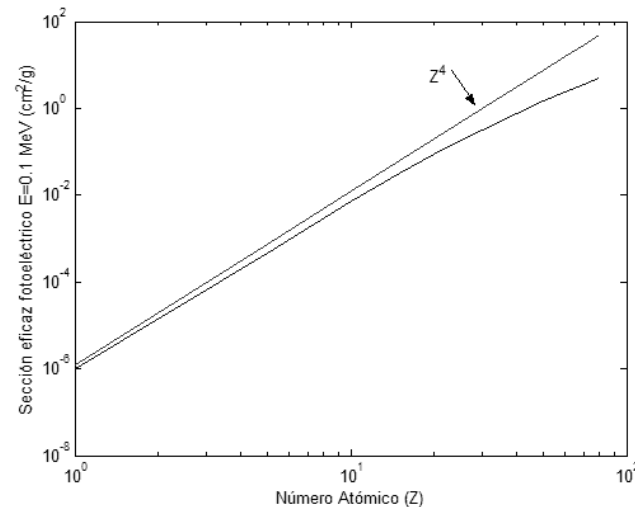
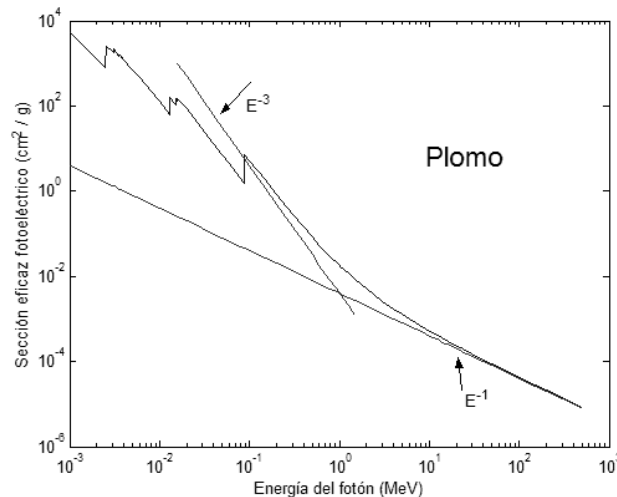
Efecto fotoeléctrico: sección eficaz

Aunque la contribución de la capa K es normalmente dominante (orden 80%), también intervienen de modo subdominante las fotoionizaciones de capas L, M, etc. Es muy difícil dar una parametrización exacta y exhaustiva de la sección eficaz del efecto fotoeléctrico que reproduzca de modo fiel las dependencias en Z y $h\nu$ así como la presencia de los bordes de fotoabsorción. Es habitual dar una descripción global proporcional a $Z^n/h\nu^m$

$$\tau_a \propto \frac{Z^n}{(h\nu)^m}$$

$h\nu$	0.1 MeV	5 MeV
n	4	~ 4.6
m	~ 3	1

El comportamiento a alta energía $h\nu \gg 0.5$ MeV es análogo a Compton $\sigma \sim 1/h\nu$ pero la sección eficaz de fotoeléctrico es aproximadamente $Z^{3.6} 10^{-8}$ veces la sección eficaz Compton y es por tanto despreciable.



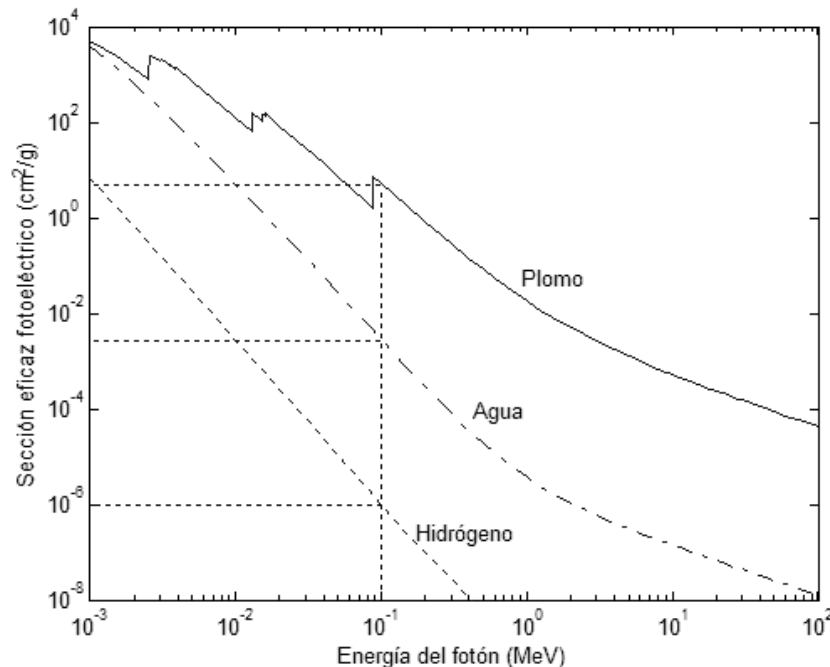
Efecto fotoeléctrico: coeficiente de atenuación

En la región de baja energía ($h\nu < 0.1$ MeV) donde es dominante la interacción a través del efecto fotoeléctrico, una buena aproximación para la sección eficaz será (para números atómicos bajos el comportamiento más adecuado es $Z^{4.8}$)

$$\tau_a \propto \frac{Z^4}{(h\nu)^3}$$

De aquí podemos calcular la contribución al coeficiente de atenuación másico proveniente del efecto fotoeléctrico:

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{N_A}{A} \tau_a \propto \frac{Z}{A} \frac{Z^3}{(h\nu)^3}$$



Por lo tanto la dependencia en Z del coeficiente másico de atenuación es Z^3 (para átomos de Z bajo $Z^{3.8}$). Si por ejemplo comparamos los coeficientes de agua y de plomo para el borde K del plomo (0.1 MeV) vemos en la figura que el coeficiente es unas 1000 veces mayor en plomo. Mientras que los números atómicos son 82 y 7.5 aproximadamente 10 a 1.

Efecto fotoeléctrico: número atómico efectivo

En muchas situaciones prácticas no tratamos con elementos simples sino con compuestos o mezclas de diferentes átomos. En estos casos suele ser interesante describir el material a través de un número atómico efectivo. Esto es sobre todo útil en cámaras de ionización en las que deseamos que las paredes absorban los fotones X de la misma forma que lo hace el aire. Esta definición está vinculada al efecto fotoeléctrico, ya que en las energías en que el efecto Compton es dominante, éste depende de la densidad electrónica en el medio y no del Z del mismo.

Consideremos una mezcla formada por átomos con números atómicos Z_1, Z_2, \dots, Z_n que participan mediante proporciones en peso w_1, w_2, \dots, w_n . El coeficiente efectivo de atenuación para la mezcla proveniente del efecto fotoeléctrico será

$$\frac{\tau}{\rho} = \omega_1 \left(\frac{\tau}{\rho} \right)_1 + \omega_2 \left(\frac{\tau}{\rho} \right)_2 + \dots + \omega_n \left(\frac{\tau}{\rho} \right)_n = k \frac{1}{(h\nu)^3} \left[\omega_1 \frac{Z_1}{A_1} Z_1^m + \omega_2 \frac{Z_2}{A_2} Z_2^m + \dots + \omega_n \frac{Z_n}{A_n} Z_n^m \right]$$

Si queremos describir el material a través de un único número atómico efectivo, entonces

$$\frac{\tau}{\rho} = k \frac{1}{(h\nu)^3} \left(\frac{Z}{A} \right)_{\text{eff}} \bar{Z}^m = k \frac{1}{(h\nu)^3} \left[\omega_1 \frac{Z_1}{A_1} Z_1^m + \omega_2 \frac{Z_2}{A_2} Z_2^m + \dots + \omega_n \frac{Z_n}{A_n} Z_n^m \right]$$

$$\left(\frac{Z}{A} \right)_{\text{eff}} = \omega_1 \frac{Z_1}{A_1} + \omega_2 \frac{Z_2}{A_2} + \dots + \omega_n \frac{Z_n}{A_n}$$

Por lo tanto el número atómico efectivo vendrá dado por

$$\bar{Z}^m = \frac{\left[\omega_1 \frac{Z_1}{A_1} Z_1^m + \omega_2 \frac{Z_2}{A_2} Z_2^m + \dots + \omega_n \frac{Z_n}{A_n} Z_n^m \right]}{\omega_1 \frac{Z_1}{A_1} + \omega_2 \frac{Z_2}{A_2} + \dots + \omega_n \frac{Z_n}{A_n}}$$

Efecto fotoeléctrico: número atómico efectivo

Esto se puede escribir como

$$\bar{Z} = \sqrt[m]{a_1 Z_1^m + a_2 Z_2^m + \dots + a_n Z_n^m}$$

con

$$a_i = \frac{\omega_i \frac{Z_i}{A_i}}{\sum_{i=1}^n \omega_i \frac{Z_i}{A_i}}$$

Donde w_1, w_2, \dots, w_n son las proporciones en peso de los átomos con números atómicos Z_1, Z_2, \dots, Z_n . El coeficiente a_i representa la fracción de los electrones presentes en la muestra que pertenecen al átomo de número atómico Z_i . El exponente m es aquel que atribuyamos a la dependencia efectiva del efecto fotoeléctrico en el rango de energías y materiales que usemos. Normalmente se suele usar $m=3.5$ (Cunnigham) aunque otros autores recomiendan $m=2.94$ (Mayneord).

TABLE 5-3
Data for Absorbing Materials

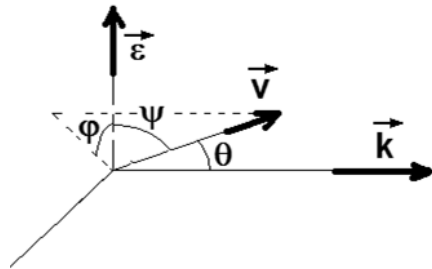
Material	ρ -Density (kg/m ³)	Effective Atomic Number ³ , \bar{Z}	N_e (electrons per g)
Hydrogen (at STP) ¹	.08988	1	5.97×10^{23}
Carbon	2250	6	3.01×10^{23}
Oxygen (at STP) ¹	1.429	8	3.01×10^{23}
Aluminum	2699	13	2.90×10^{23}
Copper	8960	29	2.75×10^{23}
Lead	11360	82	2.38×10^{23}
Air ² (at STP) ¹	1.293	7.78	3.01×10^{23}
Water ²	1000	7.51	3.34×10^{23}
Muscle ²	1040	7.64	3.31×10^{23}
Fat ²	916	6.46	3.34×10^{23}
Bone ²	1650	12.31	3.19×10^{23}

(1) STP, or standard temperature and pressure: 0° C, 101.3 kPa.

(2) Composition of air, water, muscle, bone, and fat are given in Appendix A.

Efecto fotoeléctrico: emisión del fotoelectrón

La emisión del fotoelectrón por efecto fotoeléctrico no es isotrópica. A baja energía, considerando una situación no relativista y semiclásica, el electrón sería expulsado del átomo debido al campo eléctrico de la onda electromagnética que actúa sobre él. La probabilidad de ser emitido en una determinada dirección será proporcional al cuadrado de la proyección del vector eléctrico de la onda sobre la dirección de la velocidad inicial del electrón.



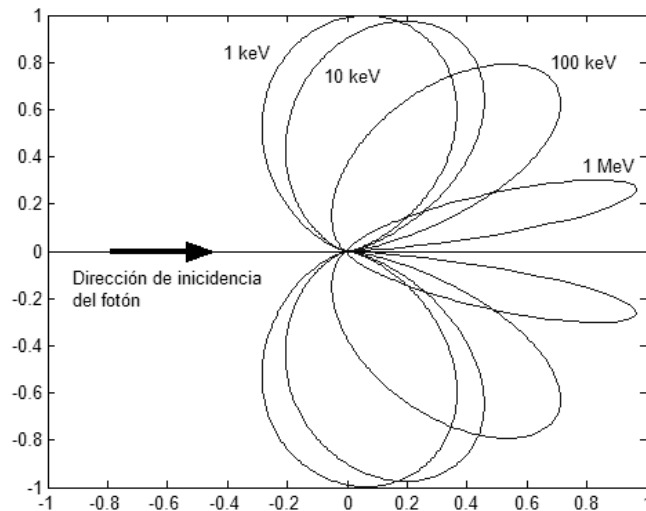
En primera aproximación

$$\frac{dI}{d\Omega} \propto \cos^2(\psi) = \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)$$

Modelo no relativista (Fischer)

$$\frac{dI}{d\Omega} \propto \frac{\sin^2(\theta) \cos^2(\varphi)}{\left[1 + \left(\frac{h\nu}{2m_0c^2}\right) - \beta \cos(\theta)\right]^4}$$

El cálculo relativista fue hecho por Sauter (Ann. Physik, 454 1931) donde considera que $137 * Z \ll 1$ y $\beta=v/c$ es cercano a la unidad



$$\frac{dI}{d\Omega} \propto \beta^2 \sin^2(\theta) \left\{ \frac{\sqrt{1-\beta^2} \cos^2(\varphi)}{(1-\beta \cos(\theta))^4} - \frac{[1-\sqrt{1-\beta^2}] \cos^2(\varphi)}{2\sqrt{1-\beta^2} (1-\beta \cos(\theta))^3} + \frac{[1-\sqrt{1-\beta^2}]^2}{4(1-\beta^2)(1-\beta \cos(\theta))^3} \right\}$$

Los términos del denominador $(1-\beta \cos(\theta))$ tienden a reforzar la emisión hacia delante cuando β tiende a la unidad.

Gráfico polar de la probabilidad angular relativa de emisión del fotoelectrón en función de la energía del fotón incidente. Aproximación de Sauter ($\Phi=0$)

Efecto fotoeléctrico: emisión del fotoelectrón

La emisión de fotoelectrón para luz polarizada sigue de modo preferente la dirección del vector de campo eléctrico en el límite de baja energía. En general el ángulo para el que la probabilidad de emisión es máxima depende de la energía del fotón incidente.

Es habitual describir la dependencia angular de emisión mediante el ángulo de bipartición. Es el ángulo respecto al momento del fotón incidente que verifica que la probabilidad de emisión del fotoelectrón a un ángulo mayor es igual a la su emisión a un ángulo inferior. Evidentemente a baja energía el ángulo de bipartición tiende a 90° , mientras que a una energía de 1MeV se sitúa entorno a los 20° .

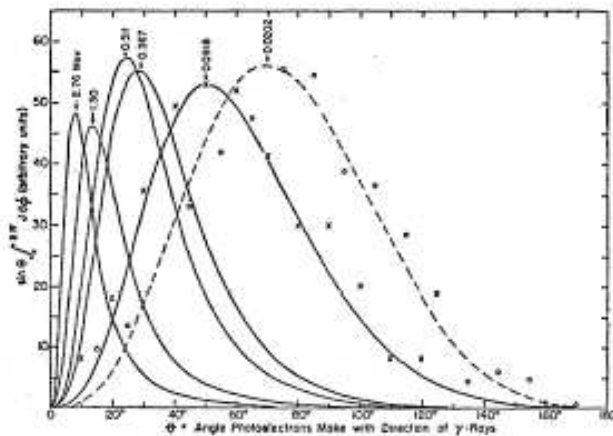


FIG. 20. Photoelectric effect. Directional distribution of photoelectrons for different energies, applicable to cloud-chamber measurements. *Solid curves*: calculated using Sauter's relativistic Eq. (52). *Dashed curve*: calculated using Fischer's nonrelativistic Eq. (51) but using relativistic $\beta = v/c$. *Crosses*: measured values of E. Lutze at 0.0918 Mev (Ann. Physik 9, 853 (1931)). *Circles*: measured values of Williams, Nuttall, and Barlow at 0.0202 Mev (Proc. Roy. Soc. (London) 121A, 611 (1928)).

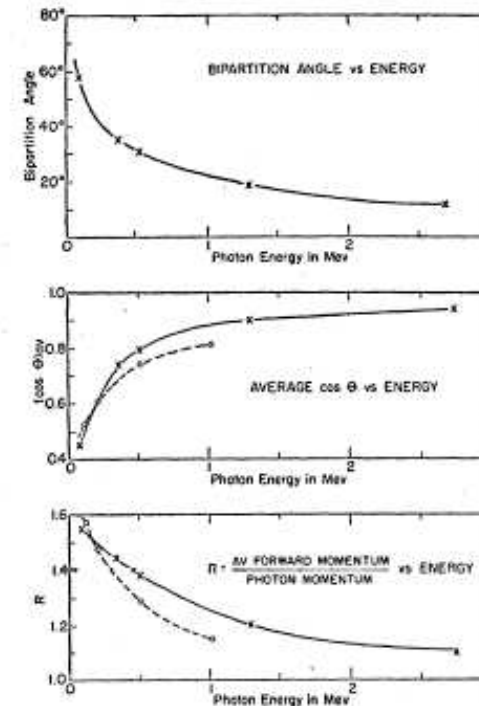
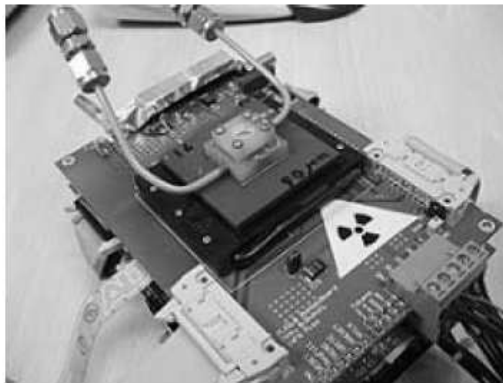


FIG. 23. Photoelectric effect. (1) Values of bipartition angles obtained from Fig. 22. (2) Values of $(\cos\theta)_N$ obtained from graphical integration of curves of $\cos\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} J d\varphi$ vs θ using Sauter's Eq. (52) (crosses and solid curve); also from Hulme's values of R , Table XI and Eq. (44) (circles and dashed curve). (3) Values of R as given by Hulme (circles and dashed curve) and as calculated with Eq. (44) from $(\cos\theta)_N$ obtained with Sauter's equations (crosses and solid curve).

Polarímetro de rayos X

Existen diferentes formas en la naturaleza de producción de rayos X, muchas de ellas producen la polarización parcial o total de la radiación. La polarimetría de rayos X tiene un gran interés especialmente en astrofísica pues permite investigar los mecanismos de producción de rayos X en las fuentes de esta radiación.



Esquema del polarímetro de rayos X desarrollado por R. Bellazini y el grupo de Pisa Rev. Sci. Instrum. 72, 2, 1372-1378 (2001). Obtiene la polarización a través de la orientación de la distribución de ionización en el gas producida por el fotoelectrón.

Para reconstruir la dirección del fotoelectrón se usa un gas a presión ambiente cuya distribución de ionización se lee mediante una matriz VLSI con $80\mu\text{m}$ de paso.

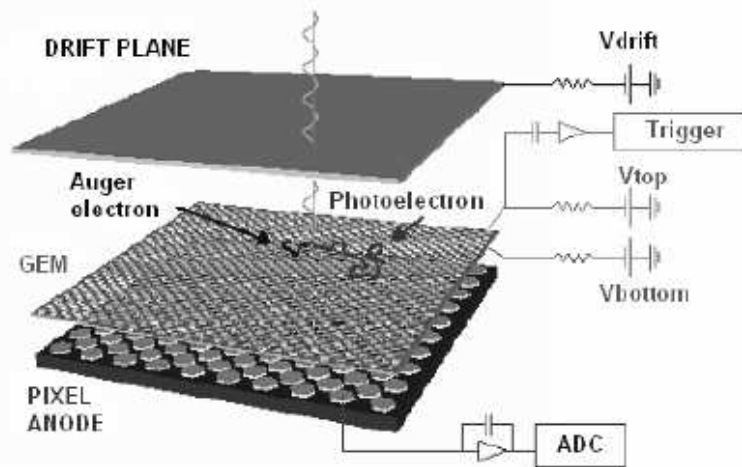
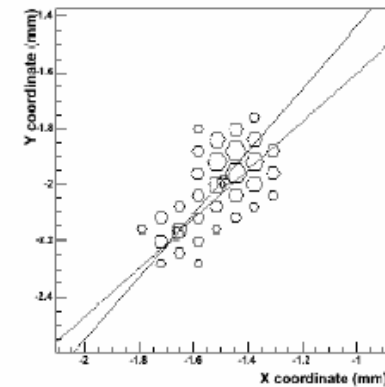


Fig.1. The concept of the Gas Pixel Detector.

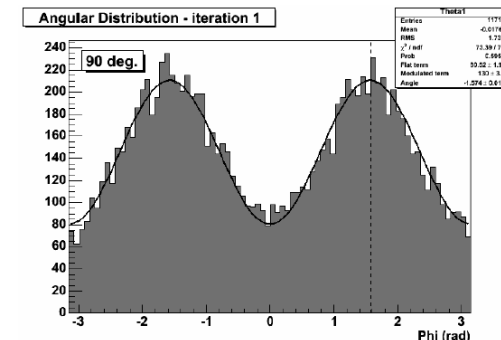
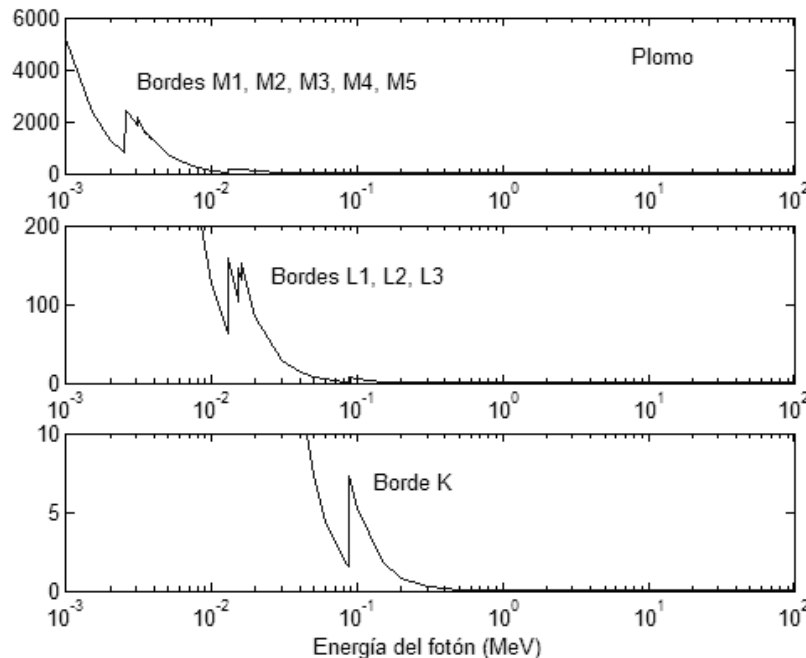


Fig.12. Angular distribution of the reconstructed photoelectron tracks. The polarization angle is $90^\circ \pm 1^\circ$. For this specific measurement the modulation factor obtained in a slightly different source configuration is $\sim 45\%$.

Efecto fotoeléctrico: bordes K, L, M

La sección eficaz del efecto fotoeléctrico muestra abruptas variaciones. En el caso del plomo es claramente visible esta variación entorno a los 88 keV. Esta energía corresponde a la energía de ligadura de los dos electrones de la capa interna de este átomo (o capa K). Por debajo de esta energía éstos electrones no pueden participar en el efecto fotoeléctrico. Por debajo de esta energía sólo los electrones de las capas superiores pueden sufrir el efecto fotoeléctrico (L,M,...). Aunque éste átomo tiene 82 electrones el valor relativo del salto de la sección eficaz en el borde K producido por estos dos electrones es de un 80%.



El borde L aparece cuando la energía del fotón es igual a la de ligadura de los electrones en la capa L (15.9 keV L1, 15.2 keV L2, 13.0 keV L3). La contribución relativa del salto en la capa L es menor debido a la menor energía de ligadura de estos electrones.

Finalmente en el plomo es también posible ver el salto correspondiente a la capa M (3.85 keV M1, 3.55 keV M2, 3.07 keV M3, 2.59 keV M4, 2.48 keV M5)

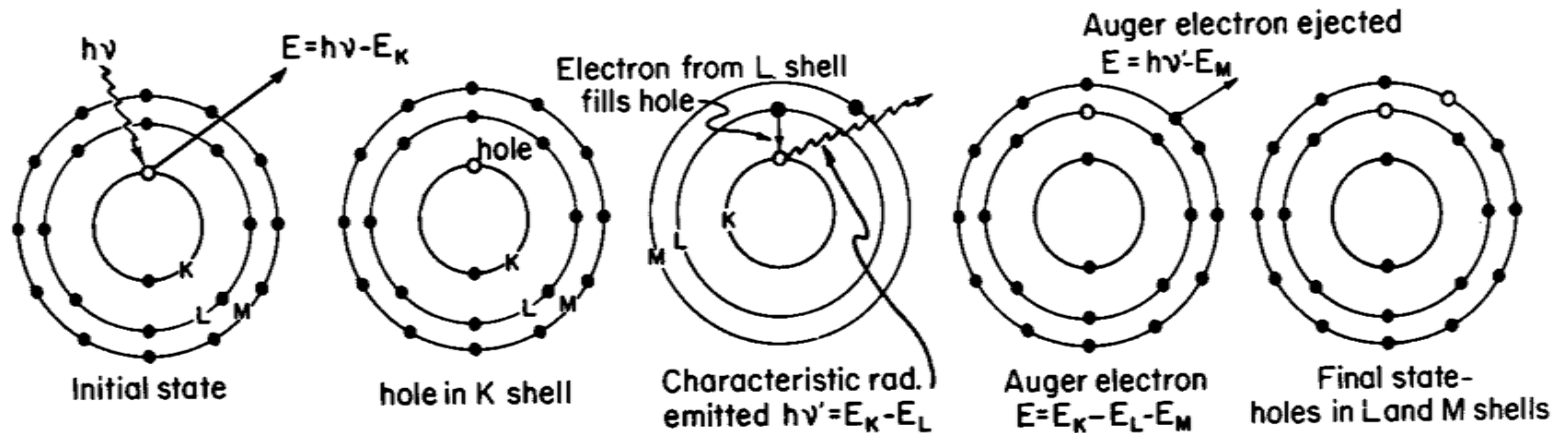
Efecto fotoeléctrico: transferencia de energía

Cuando planteamos el proceso de emisión de un fotoelectrón por efecto fotoeléctrico, indicamos que la energía transferida al electrón como energía cinética es igual a la del fotón $h\nu$ menos la energía de ligadura del electrón.

$$T = h\nu - E_b$$

Sin embargo éste no es el final del proceso físico. Como consecuencia de la vacante interna en la estructura electrónica del átomo, éste puede transformar parte o toda la energía de ligadura inicial del fotoelectrón E_b bien en radiación electromagnética o en energía cinética de otros electrones. Para ello el átomo tiene dos mecanismos principales:

- Emisión de rayos X característicos. Provenientes de las transiciones electrónicas desde niveles menos ligados para llenar las vacantes internas.
- Emisión de electrones Auger.



Ejemplo de la reordenación de los niveles atómicos subsiguiente a la emisión de un fotoelectrón mediante efecto Auger. En este caso se dice que el electrón Auger es KLM debido a las tres capas implicadas.

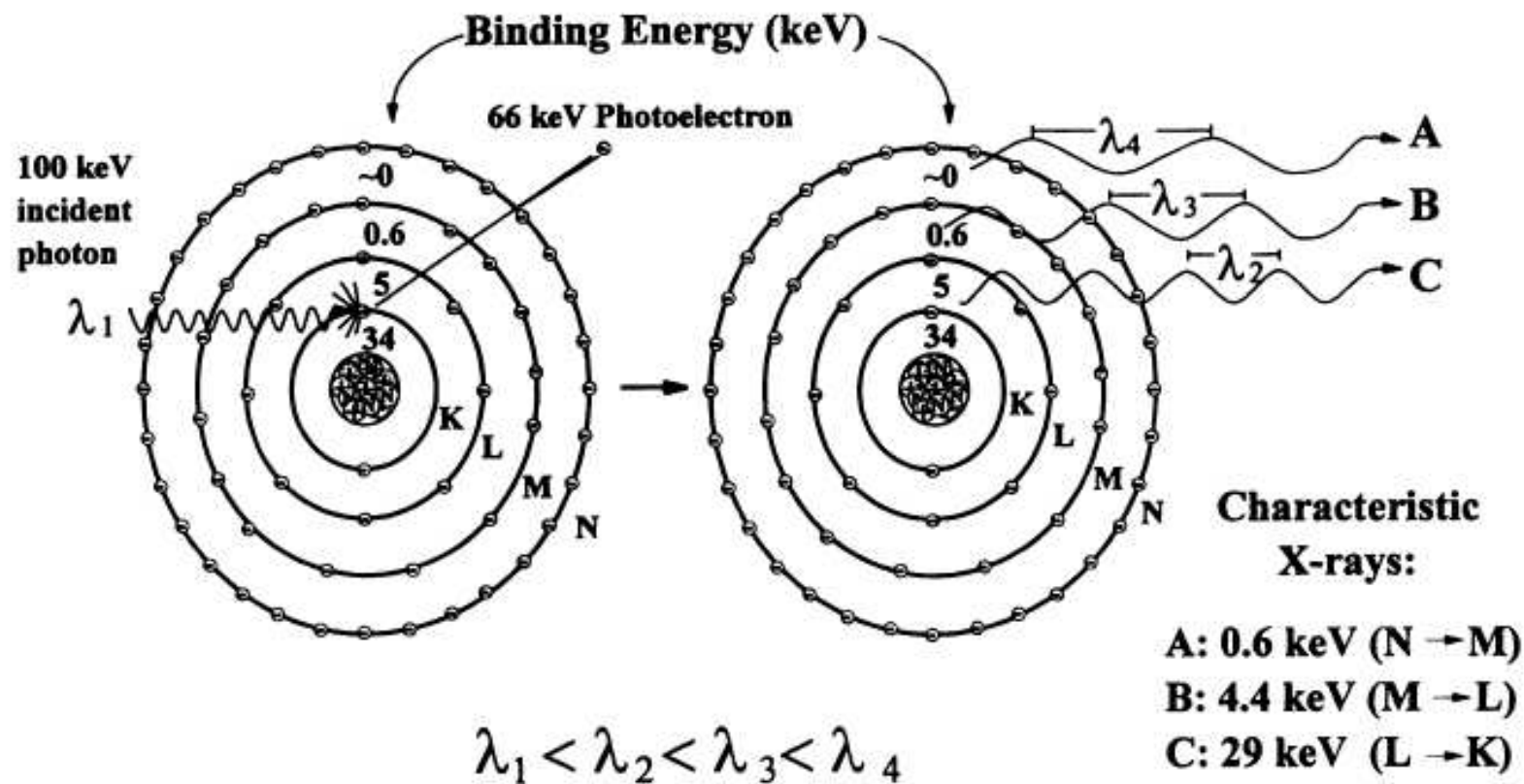


Figure 5. Photoelectric absorption. Diagram shows a 100-keV photon undergoing photoelectric absorption with an iodine atom. In this case, the K-shell electron is ejected with a kinetic energy equal to the difference between the incident photon energy and the K-shell binding energy of 34 keV or 66 keV. The vacancy created in the K shell results in the transition of an electron from the L shell to the K shell. The difference in their binding energies (ie, 34 and 5 keV) results in a 29-keV K_{α} characteristic x ray. This electron cascade will continue, resulting in the production of other characteristic x rays of lower energies. Note that the sum of the characteristic x-ray energies equals the binding energy of the ejected photoelectrons. Although not shown in this diagram, Auger electrons of various energies could be emitted in lieu of the characteristic x-ray emissions. (Redrawn and modified, with permission, from reference 8.)

Efecto fotoeléctrico: transferencia de energía

- Mediante el efecto Auger transferimos como energía cinética a electrones la energía de ligadura inicial del fotoelectrón menos la energía de ligadura de las vacantes finales del átomo en capas más externas.
- El proceso Auger ocurre en cascada llevando al átomo a un estado ionizado final con vacantes en sus capas externas.
- Los electrones Auger recorren muy poca distancia antes de detenerse por lo que su energía se deposita localmente. Toda la energía que no se convierta en radiación característica se atribuirá al mecanismo Auger.

Respecto a la emisión de rayos X característicos definimos la emisión neta de fluorescencia (fluorescent yield) como:

$$Y_K = \frac{\text{número de rayos X característicos K}}{\text{número de vacantes K atómicas}}$$

$$Y_L = \frac{\text{número de rayos X característicos L}}{\text{número de vacantes L atómicas}}$$

La probabilidad de la emisión de un rayo X de fluorescencia aumenta con el número atómico considerablemente.

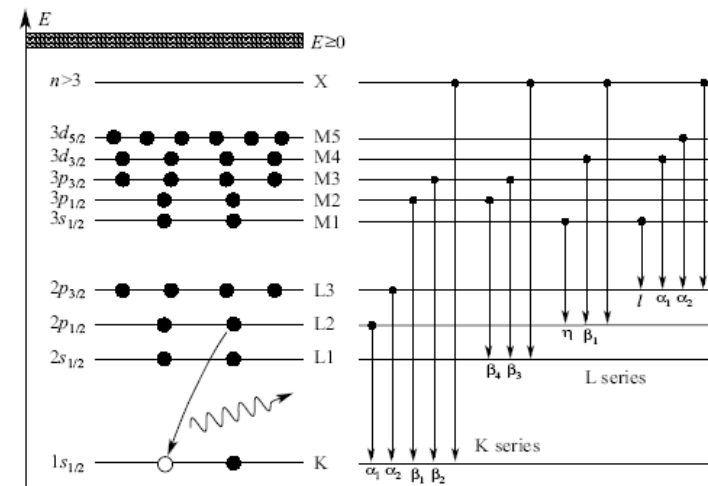


Figure 2.3: Various notations for inner atomic electron shells (left) and allowed radiative transitions (right) to these shells. Transitions different from the ones indicated in the diagram (e.g. K-M4) are also possible, but their transition probabilities are extremely small.

Fluorescent Yield					
Z	Y _K	Z	Y _K	Z	Y _K
10	0	40	.74	70	.92
15	.05	45	.80	75	.93
20	.19	50	.84	80	.95
25	.30	55	.88	85	.95
30	.50	60	.89	90	.97
35	.63	65	.90		

Efecto fotoeléctrico: transferencia de energía

Puesto que (ver tabla anterior) los electrones que llenan la vacante de una capa K pueden provenir de diferentes capas externas (L,M,N...) definimos

$$\overline{h\nu_K} = \text{valor medio de la energía de los fotones X característicos } K < (E_b)_K$$

$$\overline{h\nu_L} = \text{valor medio de la energía de los fotones X característicos } L < (E_b)_L$$

Para evaluar la cantidad de energía que se llevan los fotones de fluorescencia (i.e. no es transferida a energía cinética de electrones) debemos también considerar la probabilidad de que una interacción por efecto fotoeléctrico produzca una vacante en una capa K o en una capa L o en otra superior.

$$P_K = \text{fracción de vacantes en capa K para } h\nu > (E_b)_K$$

$$P_L = \text{fracción de vacantes en capa L para } (E_b)_K > h\nu > (E_b)_{L_1}$$

Estas fracciones pueden obtenerse de la sección eficaz de fotoeléctrico midiendo la altura relativa de los bordes K, L, etc.

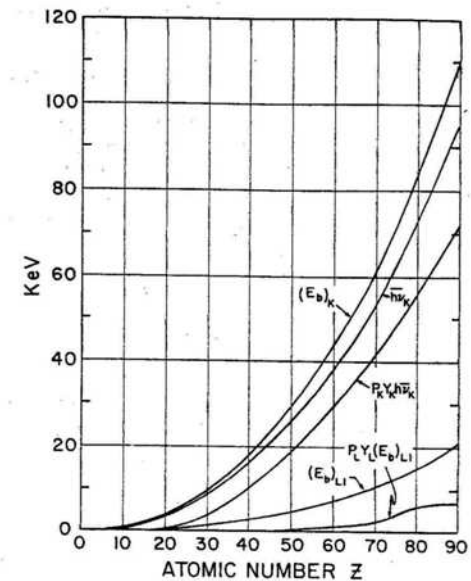


FIGURE 7.15. Electron binding energies $(E_b)_K$ in the K-shell and $(E_b)_{L_1}$ in the L1-shell; weighted mean fluorescence x-ray energy $\overline{h\nu_K}$ in the K-shell; and the products $P_K Y_K \overline{h\nu_K}$ and $P_L Y_L (E_b)_{L_1}$. The latter provides an upper-limit estimate of $P_L Y_L \overline{h\nu_L}$. Taken or derived from tables by Lederer and Shirley (1979).

Efecto fotoeléctrico: transferencia de energía

De aquí podemos obtener la parte de energía de la interacción por efecto fotoeléctrico transformada en energía cinética de electrones. Ésta se supone igual a $h\nu$ menos la parte de energía convertida en radiación característica (donde sólo tenemos en cuenta las contribuciones K y L ya que la M es muy poco probable):

$$T = h\nu - P_K Y_K \overline{h\nu_K} - (1 - P_K) P_L Y_L \overline{h\nu_L}; \quad h\nu > (E_b)_K$$

$$T = h\nu - P_L Y_L \overline{h\nu_L}; \quad (E_b)_K > h\nu > (E_b)_{L_1}$$

Usando este resultado podemos calcular la contribución del efecto fotoeléctrico al coeficiente de atenuación másico de transferencia de energía

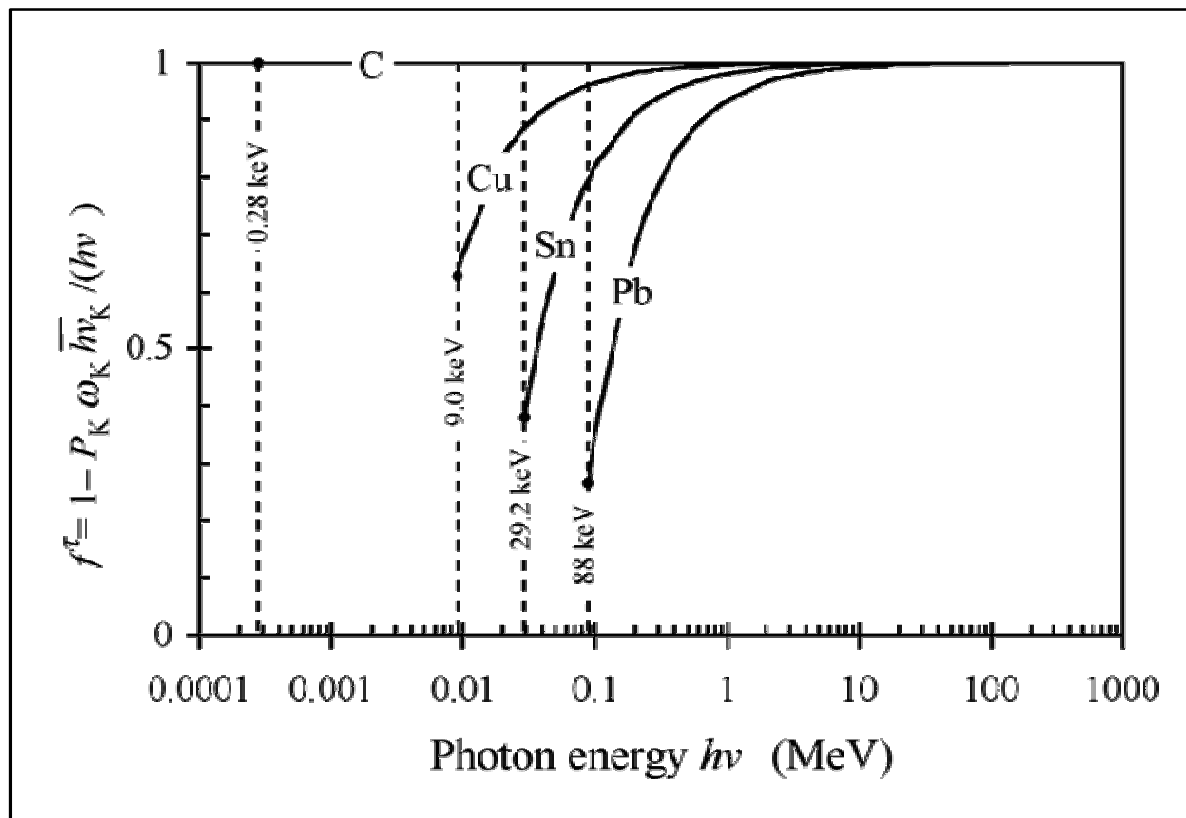
$$\frac{\tau_{tr}}{\rho} = \frac{\tau}{\rho} \left[\frac{h\nu - P_K Y_K \overline{h\nu_K} - (1 - P_K) P_L Y_L \overline{h\nu_L}}{h\nu} \right]; \quad h\nu > (E_b)_K$$

$$\frac{\tau_{tr}}{\rho} = \frac{\tau}{\rho} \left[\frac{h\nu - P_L Y_L \overline{h\nu_L}}{h\nu} \right]; \quad (E_b)_K > h\nu > (E_b)_{L_1}$$

En general las pérdidas por fluorescencia de rayos X son más importantes cuanto mayor es Z. Por otro lado el coeficiente de atenuación másico de transferencia de energía tiende a tener menores saltos asociados a los bordes de absorción debido a las pérdidas por fluorescencia.

Efecto fotoeléctrico: transferencia de energía

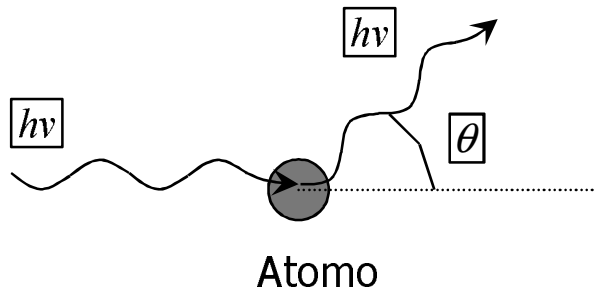
En el caso de la transferencia de energía por fotoeléctrico, si consideramos sólo la contribución de la capa K, esta fracción tiende a 1 cuando la energía del fotón tiende a ser mucho mayor que E_B la energía de ligadura en capa K.



$$f_{\tau} = 1 - \frac{P_K \omega_K E_B (K)}{h\nu}$$

Dispersión coherente o Rayleigh

La dispersión coherente o Rayleigh consiste en la dispersión elástica de fotones de baja energía por el átomo. En este proceso, los electrones oscilan siguiendo el campo electromagnético incidente produciendo la radiación de un campo de la misma frecuencia. La radiación producida por cada electrón atómico se suma a la de los otros para dar lugar a la onda electromagnética emergente. La sección eficaz se puede encontrar en Born (1969) (Atomic Physics, Blackie and Son, London)

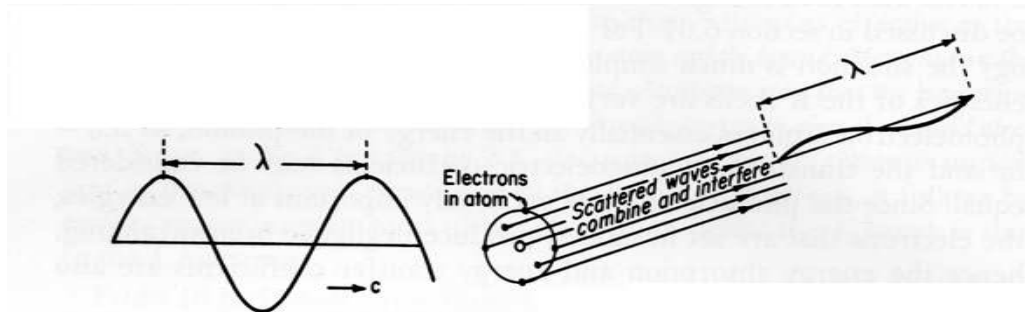


$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2(\theta)) [F(q, Z)]^2$$

Sección eficaz atómica

Donde r_0 es el radio clásico del electrón 2.8179×10^{-13} cm, y $F(q, Z)$ es el llamado factor de forma atómico. La variable q corresponde al momento transferido al átomo (ver diap. 29) y viene dado por

$$q = \frac{2h\nu}{c} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



Schematic representation of coherent scattering, a cooperative scattering process involving all the electrons of the atom in which no energy is transferred to the medium.

Los factores de forma pueden encontrarse en J. H. Hubbell and I. Øverbø. "Relativistic atomic form factors and photon coherent scattering cross sections" *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 9:69, 1979.

Dispersión coherente o Rayleigh

El factor de forma atómico $F(q,Z)$ puede considerarse como la transformada de Fourier de la densidad electrónica del átomo. Para átomos esféricos obtenemos que

$$F(q, Z) = 4\pi \int_0^\infty dr \rho(r) r^2 \frac{\text{sen}(qr / \hbar)}{qr / \hbar}$$

El comportamiento asintótico de los factores de forma así definidos:

$$\begin{aligned} F(0, Z) &= Z \\ F(\infty, Z) &= 0 \end{aligned}$$

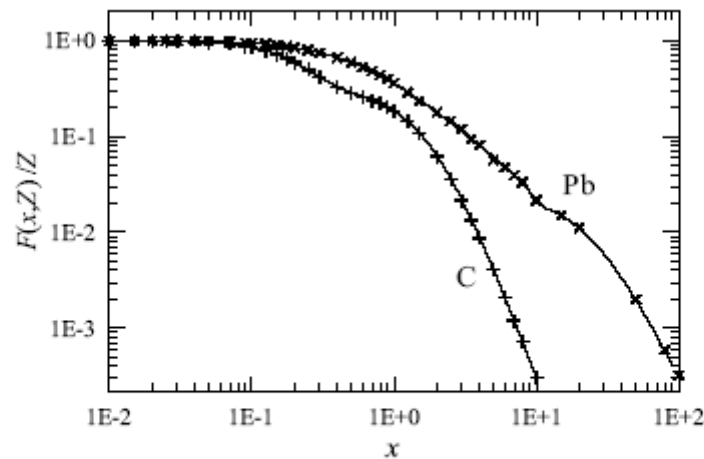
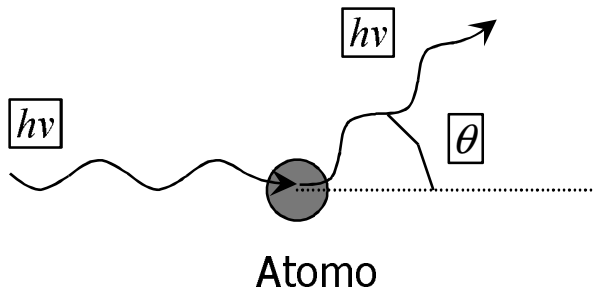


Figure 2.2: Atomic form factors for carbon and lead. Crosses are values from the tables of Hubbell et al. (1975), continuous curves represent the analytical approximation given by eq. (2.7).

Dispersión coherente o Rayleigh

- Como consecuencia del carácter elástico del proceso los fotones no pierden energía sino que sólo cambian de dirección sin producir ionización o excitación en los átomos. Esto supone que la dispersión Rayleigh no contribuye al kerma o a la dosis.
- La dependencia angular la dispersión Rayleigh depende de la energía y del número atómico del material. A altas energías los fotones se dispersan a ángulos generalmente muy bajos. Por tanto la dispersión coherente interfiere en las medidas de haz estrecho.
- Aunque el valor de su sección eficaz es típicamente un orden de magnitud menor que la de fotoeléctrico es importante a bajas energías.



$h\nu$	0.1 MeV	1 MeV	10 MeV
Al	15	2	0.5
Pb	30	4	1

Ángulos para los cuales la probabilidad de dispersión a un ángulo menor es $2/3$

El factor de forma tienden a Z a baja energía con lo que en este límite podemos escribir:

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2(\theta)) Z^2; \quad h\nu < 1 \text{ keV}$$

$$\sigma_R = \int_0^\pi d\theta \, 2\pi \sin(\theta) \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2(\theta)) Z^2$$

La integral arroja el valor (ver diap. 15)

$$\sigma_R \approx \frac{8\pi r_0^2}{3} Z^2$$

Para Si esto corresponde a 130 barn

Dispersión coherente o Rayleigh

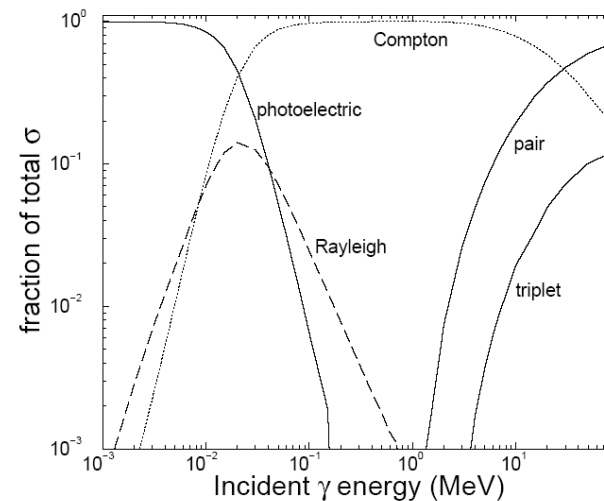
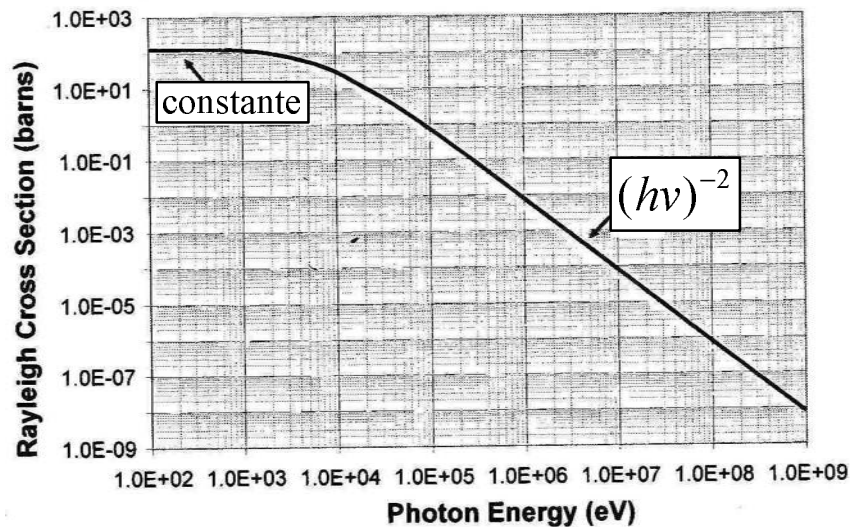
A alta energía (podemos fijar como energía crítica para este comportamiento $Z/2$ MeV) el factor de forma es proporcional a Z e inversamente proporcional a $h\nu$, de los que se obtiene la dependencia

$$\sigma_R \propto \frac{Z^2}{(h\nu)^2}$$

Podemos entonces calcular la contribución del scattering coherente al coeficiente de atenuación másico, de modo que obtenemos que

$$\frac{\sigma_R}{\rho} \propto \frac{Z}{(h\nu)^2}$$

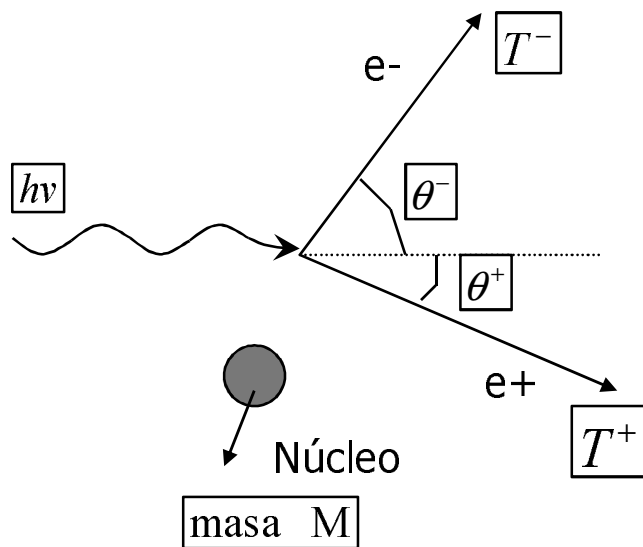
La contribución al coeficiente másico total es pequeña (menor de un 10%) sobre todo es importante a energías bajas y para átomos con bajo número atómico.



Contribución relativa en Carbono a la sección eficaz total para cada energía.

Creación de pares

Se trata de un proceso sólo relevante a alta energía ($h\nu \gg 1.022 \text{ MeV}$). Existen dos mecanismos principales para la creación de un par $e^+ e^-$ ya que por conservación de cuadrimomento este proceso sólo puede tener lugar en presencia de otra carga eléctrica en un campo Coulombiano. El proceso dominante es la producción de pares en el campo eléctrico del núcleo.



Es fácil ver que el proceso no puede tener lugar en el vacío. Consideremos la conservación de energía y momento:

$$h\nu = E^+ + E^-$$

$$\frac{h\nu}{c} \vec{u} = \vec{p}^+ + \vec{p}^-; \quad \vec{u} \text{ es unitario}$$

Además se cumple

$$(E^+)^2 - (p^+c)^2 = (m_0c^2)^2$$

$$(E^-)^2 - (p^-c)^2 = (m_0c^2)^2$$

De donde se obtiene

$$h\nu = \sqrt{(p^+c)^2 + (m_0c^2)^2} + \sqrt{(p^-c)^2 + (m_0c^2)^2}$$

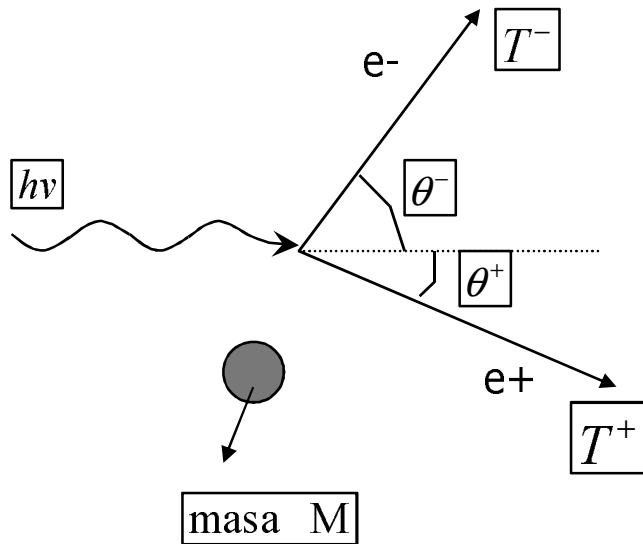
$$(h\nu)^2 = (p^+c)^2 + (p^-c)^2 + 2p^+p^-c^2 \cos(\theta)$$

$$(h\nu)^2 = (p^+c)^2 + (m_0c^2)^2 + (p^-c)^2 + (m_0c^2)^2 + 2\sqrt{(p^+c)^2 + (m_0c^2)^2} \sqrt{(p^-c)^2 + (m_0c^2)^2} > (p^+c + p^-c)^2$$

$$(h\nu)^2 = (p^+c)^2 + (p^-c)^2 + 2p^+p^-c^2 \cos(\theta) \leq (p^+c + p^-c)^2$$

Creación de pares

Supongamos que existe una partícula de masa M en cuyo campo se genera el par electrón positrón. Entonces si escribimos las ecuaciones en el Centro de Masas del sistema antes de la creación $e^+ e^-$



$$\frac{hv'}{c} = \frac{M\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}; \text{ siendo } hv' = hv \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Sustituyendo se obtiene que

$$\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha}; \text{ siendo } \alpha = \frac{hv}{Mc^2}$$

Si creamos el par $e^+ e^-$ en reposo en el CM se deberá cumplir que

$$hv' + Mc^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = Mc^2 + 2m_e c^2$$

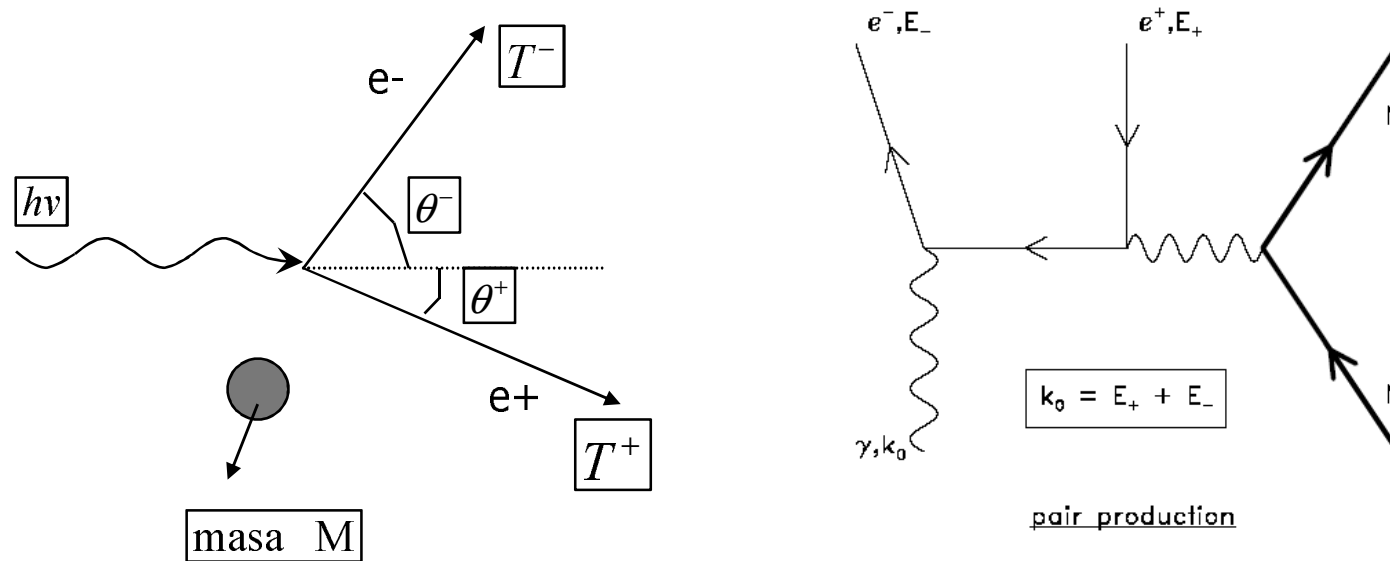
Sustituyendo el valor de hv' y de β en esta expresión podemos encontrar el valor mínimo de energía para crear un par en presencia de una masa M

$$hv \geq 2m_e c^2 + \frac{2m_e c^2}{M/m_e}$$

Por lo tanto si $M \gg m_e$ el umbral es $2m_e c^2$
Si $M = m_e$ entonces el umbral es $4m_e c^2$

Creación de pares

Incluso en presencia del núcleo más ligero (hidrógeno) el umbral de creación de pares será prácticamente igual a $2m_e c^2$ con una exactitud de $1/2000$. En este caso el momento del núcleo es relevante aunque la energía cinética que adquiere es despreciable en comparación con la del electrón y positrón.



El diagrama de Feynman de la producción de pares en el campo nuclear implica la existencia de un fotón virtual entre el núcleo y el positrón.

Creación de pares

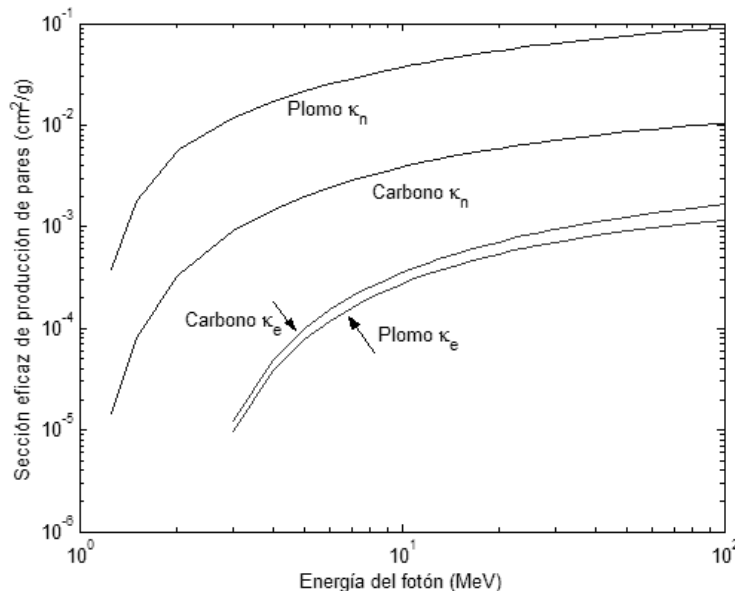
La sección eficaz asociada a la producción de pares en el campo del núcleo se puede escribir como (Baro J., M. Roteta, J.M. Fernandez Varea, y F. Salvat "Analytical cross sections for Monte Carlo simulation of photon transport" Radiat. Phys. Chem. 44, 531-552)

$$\frac{h\nu}{m_e c^2} \leq \frac{1}{\alpha Z^{\frac{1}{3}}} \quad \kappa_n \approx 4\alpha r_0^2 Z^2 \left[\frac{7}{9} \ln \left(\frac{2h\nu}{m_e c^2} \right) - \frac{109}{54} \right]$$

$$\frac{h\nu}{m_e c^2} > \frac{1}{\alpha Z^{\frac{1}{3}}} \quad \kappa_n \approx 4\alpha r_0^2 Z^2 \left[\frac{7}{9} \ln \left(\frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}} \right) - \frac{1}{54} \right]$$

Sendo r_0 el radio clásico del electrón y alpha la constante de estructura fina

Esta sección eficaz a baja energía presenta un crecimiento logarítmico con la energía del fotón incidente. A alta energía la sección eficaz tiende a ser constante.



La sección eficaz por núcleo (o átomo) presenta la dependencia Z^2 . De aquí podemos obtener la contribución al coeficiente de atenuación másico

$$\frac{\kappa}{\rho} = \kappa_n \frac{N_A}{A} \propto \frac{Z}{A} Z$$

Por lo tanto la contribución al coeficiente de atenuación másico es proporcional a Z .

Creación de pares

Si definimos la energía reducida del electrón en la creación de un par como

$$\epsilon = \frac{T^- + m_e c^2}{h\nu}; \quad T^- = \epsilon h\nu - m_e c^2$$

La sección eficaz de creación del par en función de la energía reducida del electrón puede ser escrita (Bethe, Heitler 1934 "On the stopping of fast particles and on the creation of positive electrons", Proc. R. Soc. A 154, 195-206)

$$\frac{d\kappa_n}{d\epsilon} = r_0^2 \alpha Z^2 \left\{ \left[\epsilon^2 + (1-\epsilon)^2 \right] (\Phi_1 - 4f_C) + \frac{2}{3} \epsilon(1-\epsilon)(\Phi_2 - 4f_C) \right\}$$

Donde Φ_1 y Φ_2 son integrales que involucran los factores de forma atómica y f_C representa las correcciones coulombianas en la región de alta energía (Tsai 1974 "Pair production and bremsstrahlung of charged leptons" Rev. Mod. Phys. 46, 815-851). Esta expresión nos da una distribución simétrica de la sección eficaz respecto a la energía reducida $\epsilon=1/2$. Este comportamiento es válido para $h\nu > 5$ MeV, para bajas energías la sección eficaz no es completamente simétrica. La razón es que el campo eléctrico del átomo tiende a frenar al electrón y acelerar al positrón.

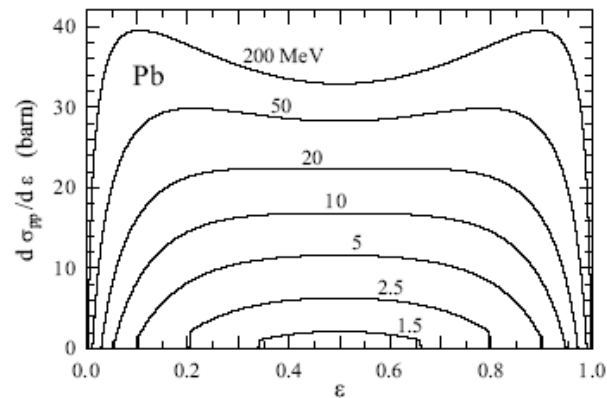


Figure 2.9: Pair production DCS in lead as a function of the electron reduced energy, $\epsilon = (E_- + m_e c^2)/E$. (Adapted from Baró et al., 1994a.)

Creación de pares

Del comportamiento simétrico de la sección eficaz se puede obtener que

$$hv = 2m_e c^2 + T^+ + T^-$$

$$\overline{T^-} = \frac{1}{2} hv - m_e c^2; \quad \overline{T^+} = \frac{1}{2} hv - m_e c^2$$

La distribución angular de emisión del electrón y del positrón pueden encontrarse en los trabajos de Heitler (1954) y Motz et al (1969). La probabilidad asociada a un cierto valor de $\cos(\theta)$ viene dada por

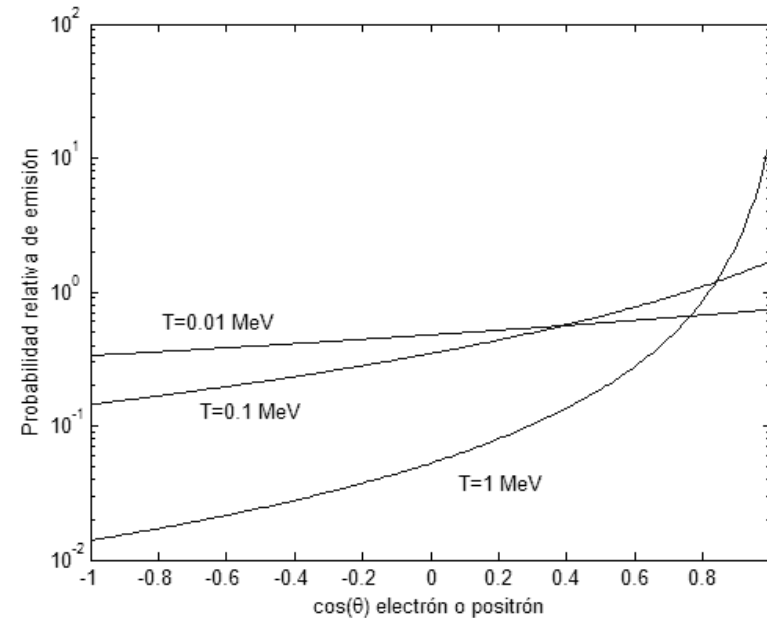
$$prob(\cos(\theta_{\pm})) \propto \frac{1}{(1 - \beta_{\pm} \cos(\theta_{\pm}))^2}$$

Siendo los valores de β

$$\beta_{\pm} = \frac{\sqrt{T^{\pm}(T^{\pm} + 2m_e c^2)}}{T^{\pm} + m_e c^2}$$

El valor medio del ángulo de emisión en el laboratorio del e+ o e- a energías altas viene dado por

$$\overline{\theta} \approx \frac{m_e c^2}{T} \quad \text{en radianes}$$



Para $hv=5$ MeV tendremos un valor medio de $T=2$ MeV con θ medio de 0.26 radianes o 15°

Creación de pares

La sección eficaz de producción (atómica) de pares en el campo del electrón puede expresarse como fracción de la sección eficaz para la producción de pares en el campo nuclear (Hubbell et al. 1980 "Pair, triplet and total atomic cross sections (and mass attenuation coefficients) for 1 MeV-100 GeV photons in elements Z=1 to 100" J. Phys. Chem. Ref. Data 9, 1023-1147). Esta forma de parametrización es válida hasta 10^5 MeV.

$$\eta(E) = \frac{Z \kappa_{\text{triplet}}(E)}{\kappa_n(E)}$$

Siendo κ_{triplet} y κ_n las secciones eficaces totales para la producción de pares en el campo del electrón y la de producción de pares en el campo nuclear respectivamente. Se define como el valor asintótico a alta energía como

$$\eta_{\infty} = \frac{Z \kappa_{\text{triplet}}(10^5 \text{ MeV})}{\kappa_n(10^5 \text{ MeV})}$$

Este valor límite es una función suave de Z entre 1.1 y 1.25 (ver ref.). Mediante esta parametrización la sección eficaz de producción triplete se puede escribir a partir de κ_n teniendo en cuenta que

$$\eta = [1 - \exp(-v)] \eta_{\infty}$$

$$v = (0.2840 - 0.1909a) \ln\left(4 \frac{m_e c^2}{h\nu}\right) + (0.1095 + 0.2206a) \ln^2\left(4 \frac{m_e c^2}{h\nu}\right) +$$

$$+ (0.02888 - 0.04269a) \ln^3\left(4 \frac{m_e c^2}{h\nu}\right) + (0.002527 + 0.002623a) \ln^4\left(4 \frac{m_e c^2}{h\nu}\right);$$

siendo $a = \alpha Z$

A 5 MeV el parámetro η tiene un valor cercano a 2.

Creación de pares

La sección eficaz atómica de producción de pares en el campo del electrón tiene un comportamiento proporcional a Z , mientras que la sección eficaz en el campo nuclear es proporcional a Z^2

$$\kappa_{triplet}(E) \propto Z$$

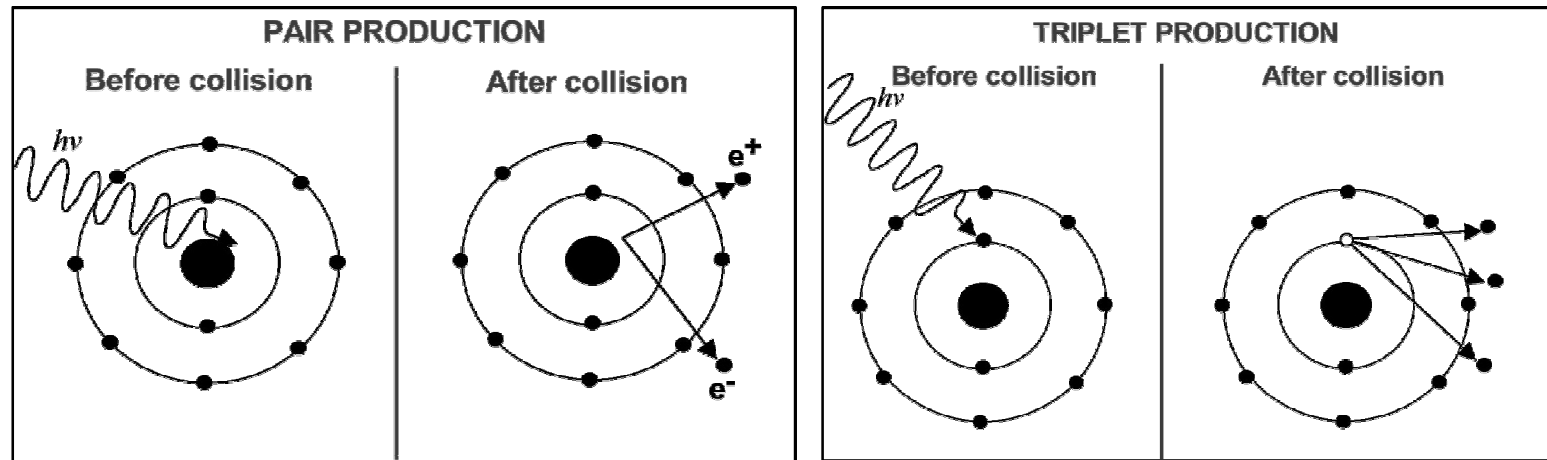
Por lo tanto la contribución relativa a la producción de pares de la reacción triplete es mayor en átomos de bajo número atómico. Para plomo ($Z=82$) la contribución de la reacción triplete es del 1%, mientras que para agua ($Z=7.5$) es del orden de un 10%.

La contribución de la creación de pares al coeficiente de atenuación másico vendrá dada por la suma de las contribuciones del proceso de creación en el campo nuclear y el proceso triplete

$$\frac{\kappa}{\rho} = \left(\frac{\kappa}{\rho} \right)_{nuclear} + \left(\frac{\kappa}{\rho} \right)_{triplete}$$

Hay que señalar que desde el punto de vista del laboratorio en la reacción triplete se generan dos electrones y un positrón en movimiento dentro del material de interacción.

Creación de pares



En el caso de la producción de un par en el campo de un electrón (tripleto) dos electrones y un positrón abandonan el punto de interacción (a diferencia de la producción en el campo nuclear)

Creación de pares

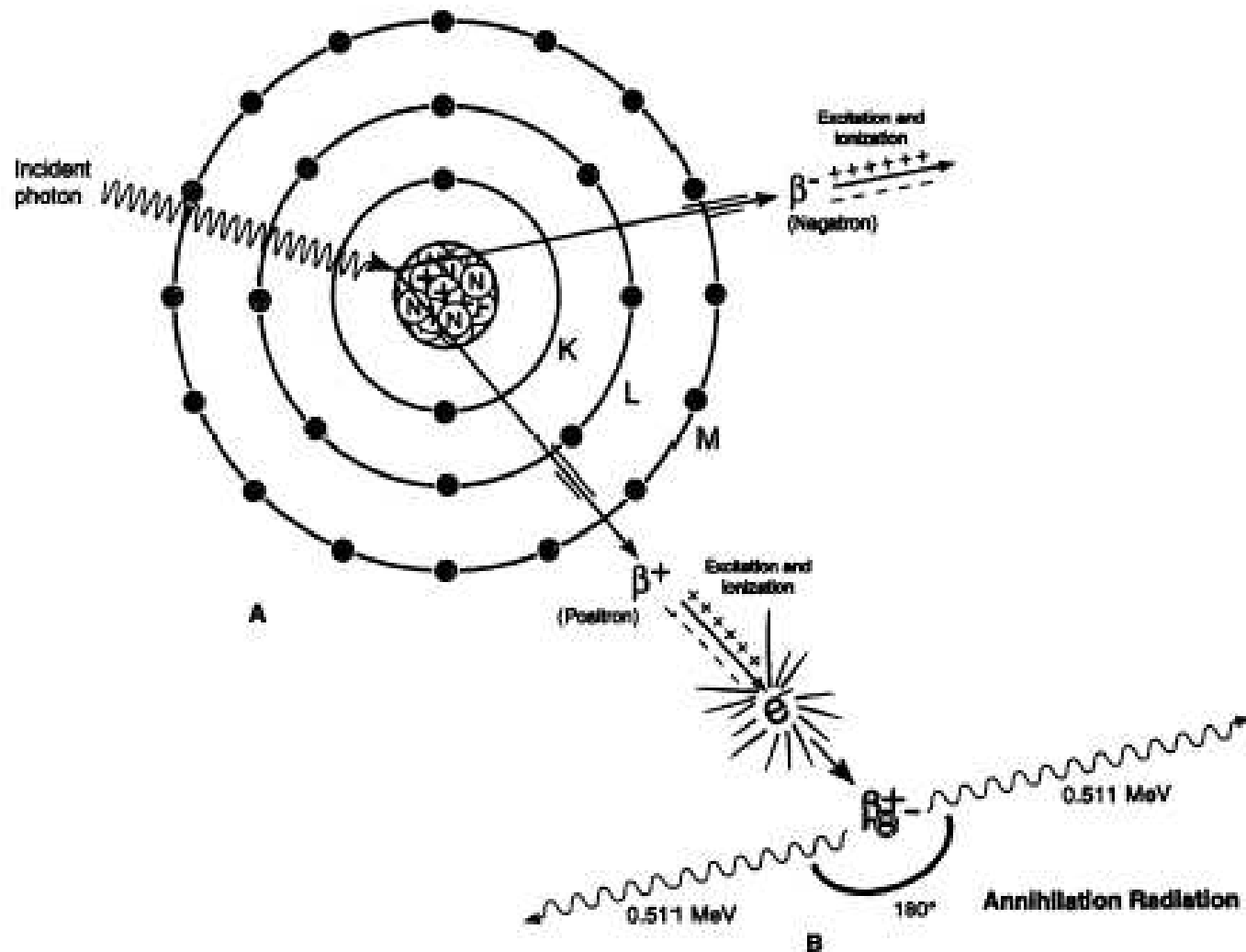


Figure 10. Pair production. Diagram illustrates the pair production process in which a high-energy incident photon, under the influence of the atomic nucleus, is converted to a matter and antimatter pair. The electron expends its kinetic energy by excitation and ionization as does the positron. However, when the positron comes to rest, it combines with an electron, producing the two 511-keV annihilation radiation photons. *K*, *L*, and *M* are electron shells. (Redrawn, with permission, from reference 8.)

Creación de pares: transferencia de energía

La fracción de energía del fotón incidente que se transforma en energía cinética de partículas cargadas (electrones, positrones) en el proceso de creación de pares tanto en el campo del núcleo como en el campo del electrón viene dado por

$$\frac{T}{h\nu} = \frac{h\nu - 2m_e c^2}{h\nu}$$

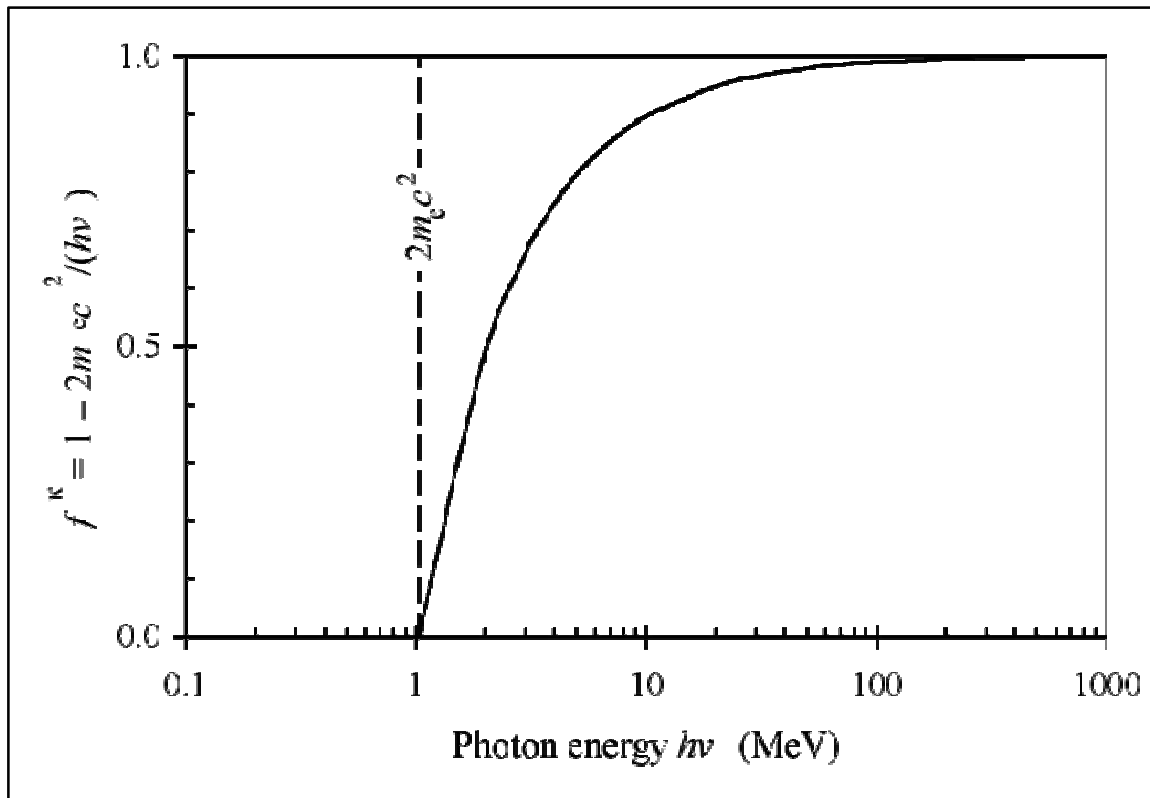
Por lo tanto la contribución de la creación de pares al coeficiente másico de transferencia de energía viene dado por

$$\frac{\kappa_{tr}}{\rho} = \left(\frac{\kappa}{\rho} \right) \frac{h\nu - 2m_e c^2}{h\nu} = \left(\frac{\kappa}{\rho} \right) \left(1 - \frac{2m_e c^2}{h\nu} \right)$$

Vemos que en el caso de la creación de pares el coeficiente másico de transferencia de energía tiende a ser igual al coeficiente de atenuación másico cuando $h\nu$ es mucho mayor que la masa en reposo del electrón.

Creación de pares: transferencia de energía

La fracción de energía del fotón incidente que se transforma en energía cinética de partículas cargadas (electrones, positrones) tiene una elevada dependencia con la energía a partir de umbral (1.022 MeV). La fracción tiende a la unidad cuando la energía del fotón se acerca al GeV.



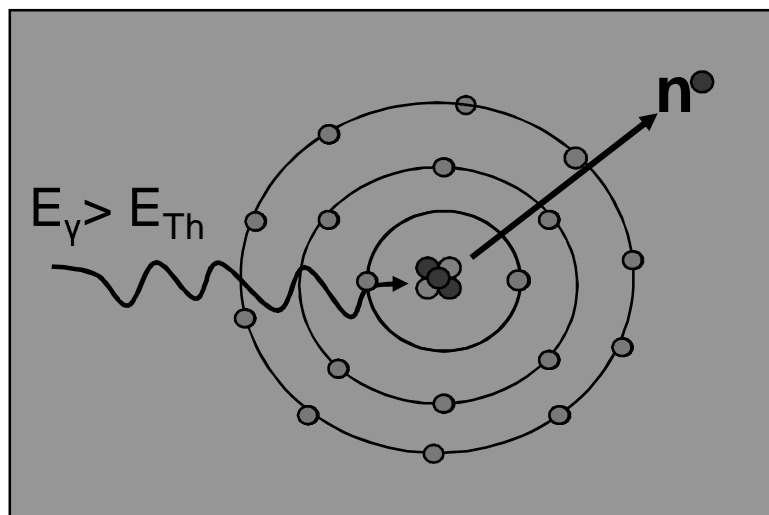
$$f_k = 1 - \frac{2m_e c^2}{h\nu}$$

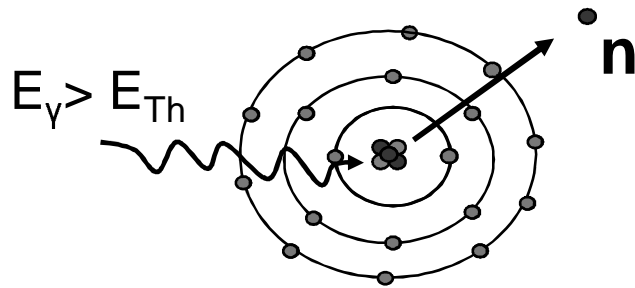
Reacciones fotonucleares

Las reacciones fotonucleares ocurren por la absorción de un fotón por el núcleo que es excitado normalmente emitiendo un neutrón o un protón. La emisión de un neutrón es más probable debido a que el protón ha de superar la barrera coulombiana del núcleo.

Se trata de reacciones con un umbral que depende del átomo. Normalmente se denotan como (γ, n) o bien (γ, p) . Los procesos de emisión de un protón contribuyen al kerma y a la dosis local. Los neutrones son mucho más penetrantes y producen reacciones nucleares al absorberse dando lugar a iones o fragmentos nucleares de alto LET y a activación de los materiales que iluminan. Son normalmente por tanto una componente indeseada de la radiación.

Su sección eficaz es inferior al 5% de la sección eficaz de producción de pares.





Absorción fotonuclear

Las reacciones fotonucleares producen la emisión de uno o varios nucleones como consecuencia de la absorción de un fotón de alta energía. El efecto se conoce como la Resonancia Gigante de Dipolo. Todas estas reacciones tienen un umbral de energía (del orden de la energía de ligadura del nucleón) para la energía del fotón, y por tanto, por debajo de este umbral no son posibles. El umbral, la energía del fotón a la que es máxima la sección eficaz y el valor de la sección eficaz dependen del núcleo considerado.

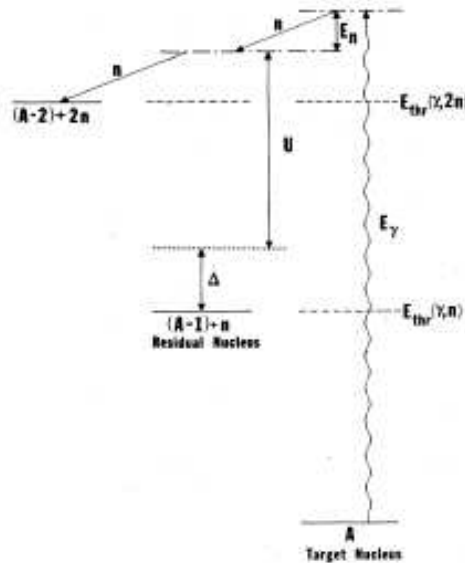
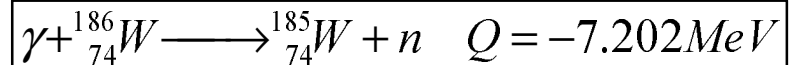
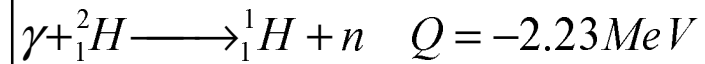
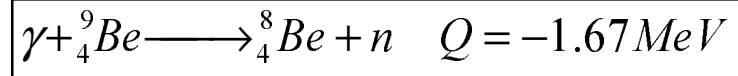


FIG. 52. Schematic diagram of the various energies encountered in the formulae for nuclear level-density calculations.

En su conjunto las reacciones posibles son:

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma, total) &= \sigma[(\gamma, n) + (\gamma, pn) + (\gamma, 2n) + (\gamma, p2n) + (\gamma, 3n) + \dots] \\ \sigma(\gamma, 1n) &= \sigma[(\gamma, n) + (\gamma, pn)] \\ \sigma(\gamma, 2n) &= \sigma[(\gamma, 2n) + (\gamma, p2n)] \\ \dots \end{aligned}$$



Isotope	180W	182W	183W	184W	186W
E(1n) th	8.49	8.05	6.19	7.41	7.20
E(2n) th	15.37	14.70	14.25	13.60	12.95

Absorción fotonuclear

Como proceso resonante, la sección eficaz de absorción fotonuclear tiene un pico a una energía característica. A primer orden se puede escribir como:

$$E_{gdr}^{\max} \approx \frac{80 \text{ MeV}}{A^{1/3}}$$

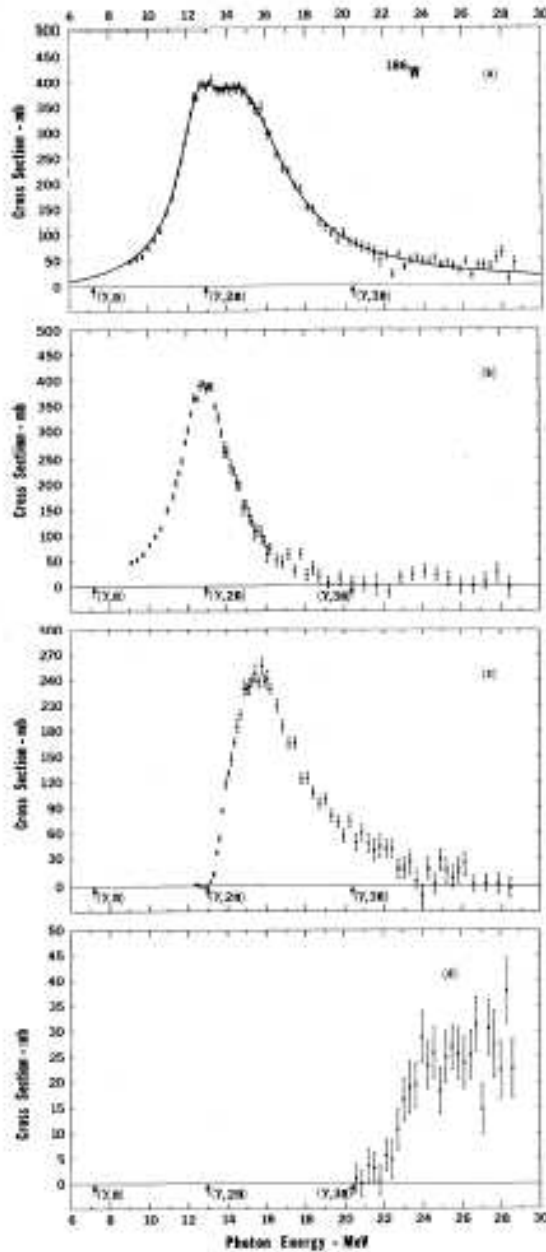


FIG. 31. Photonuclear cross sections for ^{238}W . (a) Total; (b) single; (c) double; (d) triple (Livermore).

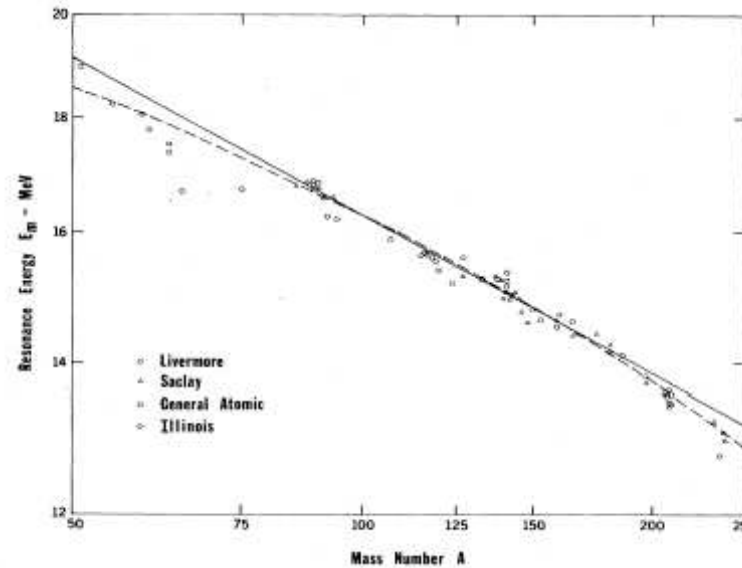


FIG. 45. The giant-resonance energy derived from the Lorentz-curve fits plotted versus mass number on a log-log scale. The solid line is the best two-parameter fit to the data of the form $E_m = c_1 A^{-1/c_2}$, from which $c_1 = 47.9 \text{ MeV}$ and $c_2 = 4.27$; the dashed line is the best three-parameter fit of the form $E_m = c_3 A^{1/3} (1 - e^{-A/A_0}) + c_4 A^{-1/3} e^{-A/A_0}$, from which $c_3 = 77.9 \text{ MeV}$, $c_4 = 34.5 \text{ MeV}$, and $A_0 = 238$.

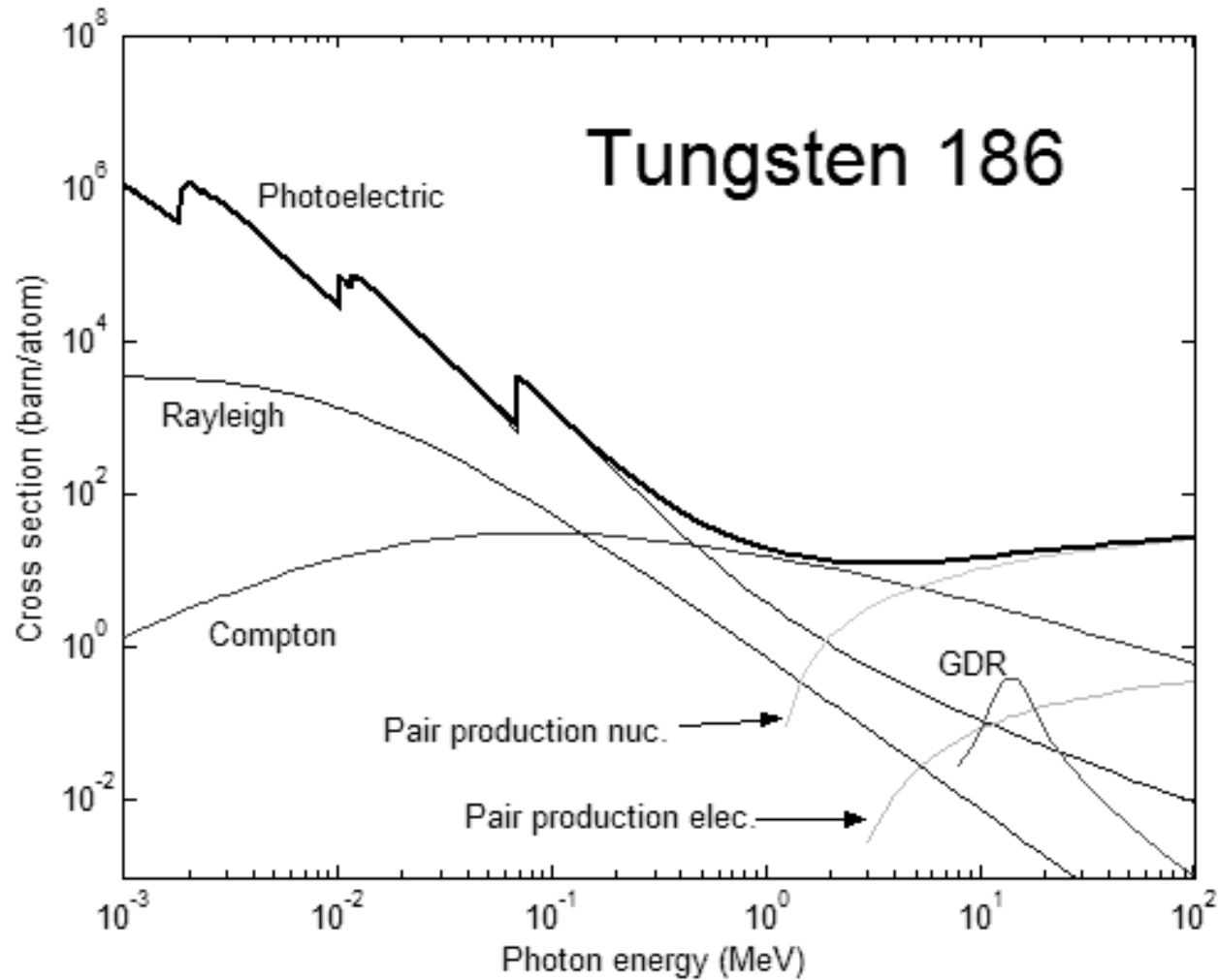
Sección eficaz total (Berman and Fultz Rev. Mod. Phys. 47, 3) para la absorción dipolar (alrededor del pico podemos usar una curva de Lorentz)

$$\sigma_{gdr}(E) \approx \sum_{i=1}^2 \frac{\sigma_i}{1 + [(E^2 - E_i^2)/(E \Gamma_i)]^2}$$

$$\sigma_{gdr} \approx (1-2) \frac{mb}{nucleon}$$

Considerando emisión isotrópica para $E < 50 \text{ MeV}$ con energías del neutrón de 1-3 MeV

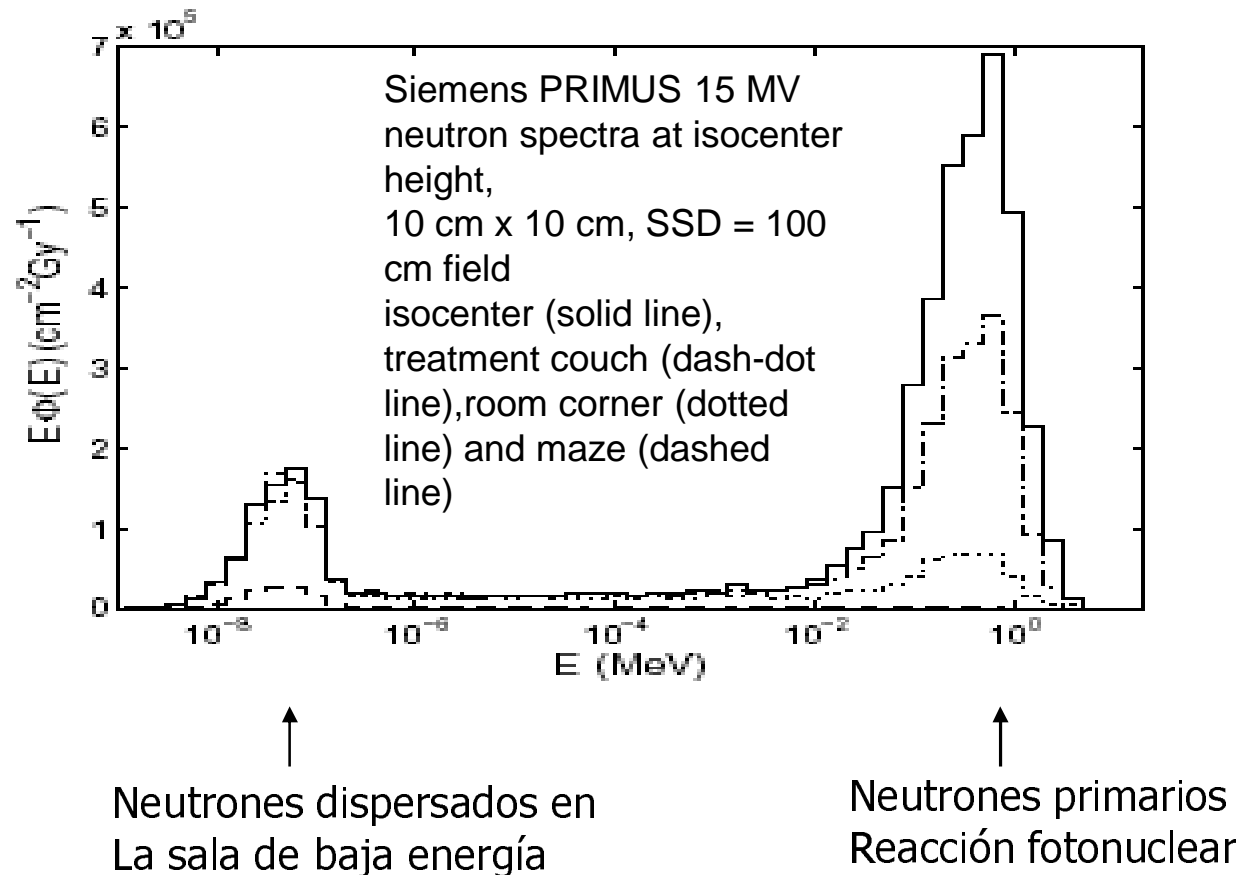
Absorción fotonuclear



El caso del tungsteno. Se muestra la sección eficaz de GDR (max. alrededor de 0.5 barn)

Reacciones fotonucleares

En los aceleradores lineales médicos se producen neutrones en los elementos metálicos directamente iluminados por el haz de megavoltaje como el colimador primario, las mordazas o el colimador multiláminas. Muchos de estos elementos están hechos de tungsteno por lo que su umbral está alrededor de 8 MeV.



Coeficiente de atenuación total, transferencia de energía y absorción de energía

A partir de las secciones eficaces antes evaluadas podemos escribir el coeficiente másico de atenuación total para fotones en un medio material como

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\sigma}{\rho} + \frac{\tau}{\rho} + \frac{\kappa}{\rho} + \frac{\sigma_R}{\rho}$$

Respectivamente las contribuciones de Compton, fotoeléctrico, creación de pares y dispersión Rayleigh. Esta última debido a que no produce cambio de energía en los fotones incidentes y los dispersa a bajo ángulo sólo es discernible en un geometría de haz ultra-estrecho.

El coeficiente másico de transferencia de energía es la suma de los coeficientes de transferencia que ya hemos visto para cada interacción

$$\frac{\mu_{tr}}{\rho} = \frac{\sigma_{tr}}{\rho} + \frac{\tau_{tr}}{\rho} + \frac{\kappa_{tr}}{\rho}$$

$$\frac{\mu_{tr}}{\rho} = \frac{\sigma}{\rho} \left[\frac{\bar{T}}{h\nu} \right] + \frac{\tau}{\rho} \left[\frac{h\nu - P_K Y_K \bar{h\nu}_K - (1 - P_K) P_L Y_L \bar{h\nu}_L}{h\nu} \right] + \frac{\kappa}{\rho} \left[\frac{h\nu - 2m_e c^2}{h\nu} \right]; \quad h\nu > 2m_e c^2$$

Coeficiente de atenuación total, transferencia de energía y absorción de energía

Si la energía del fotón incidente no supera el umbral de creación de pares, entonces tendremos que

$$\frac{\mu_{tr}}{\rho} = \frac{\sigma_{tr}}{\rho} + \frac{\tau_{tr}}{\rho} = \frac{\sigma}{\rho} \left[\frac{\bar{T}}{hv} \right] + \frac{\tau}{\rho} \left[\frac{hv - P_K Y_K \bar{h\nu}_K - (1 - P_K) P_L Y_L \bar{h\nu}_L}{hv} \right]; \quad (E_b)_K < hv < 2m_e c^2$$

En el caso en que la energía del fotón sea menor que la necesaria para la fotoionización de la capa K, entonces

$$\frac{\mu_{tr}}{\rho} = \frac{\sigma_{tr}}{\rho} + \frac{\tau_{tr}}{\rho} = \frac{\sigma}{\rho} \left[\frac{\bar{T}}{hv} \right] + \frac{\tau}{\rho} \left[\frac{hv - P_L Y_L \bar{h\nu}_L}{hv} \right]; \quad (E_b)_{L_1} < hv < (E_b)_K$$

Estos pasos se repetirían para los diferentes umbrales de fotoionización del átomo en cuestión. Sólo para alto Z tendría sentido tener en cuenta la capa M, etc

Coeficiente de atenuación total, transferencia de energía y absorción de energía

Finalmente y tal como se explicó en el capítulo anterior, el coeficiente másico de absorción de energía se puede obtener a partir del coeficiente másico de transferencia de energía considerando las pérdidas radiativas en el material

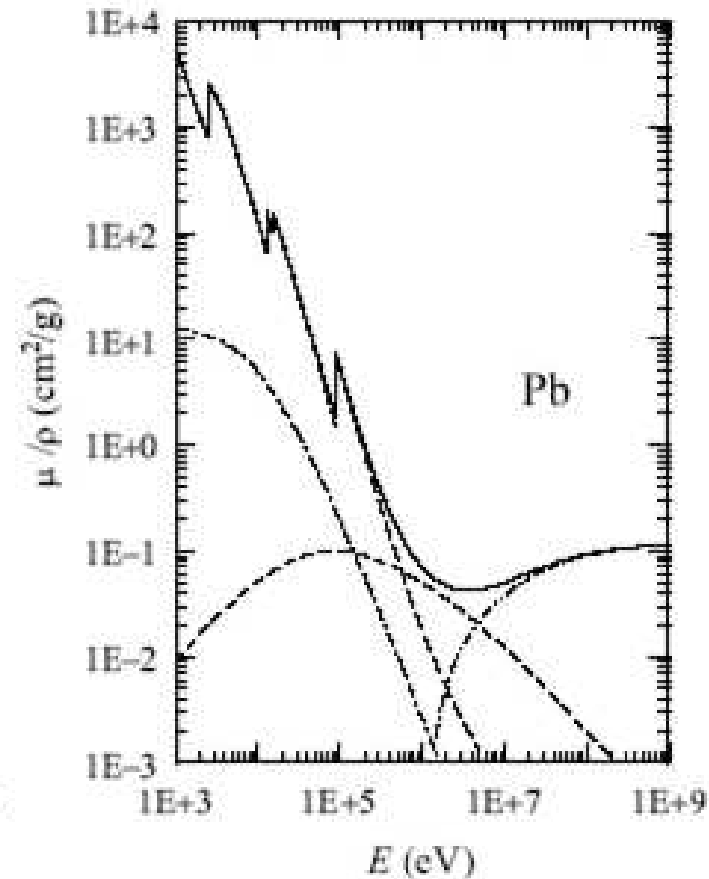
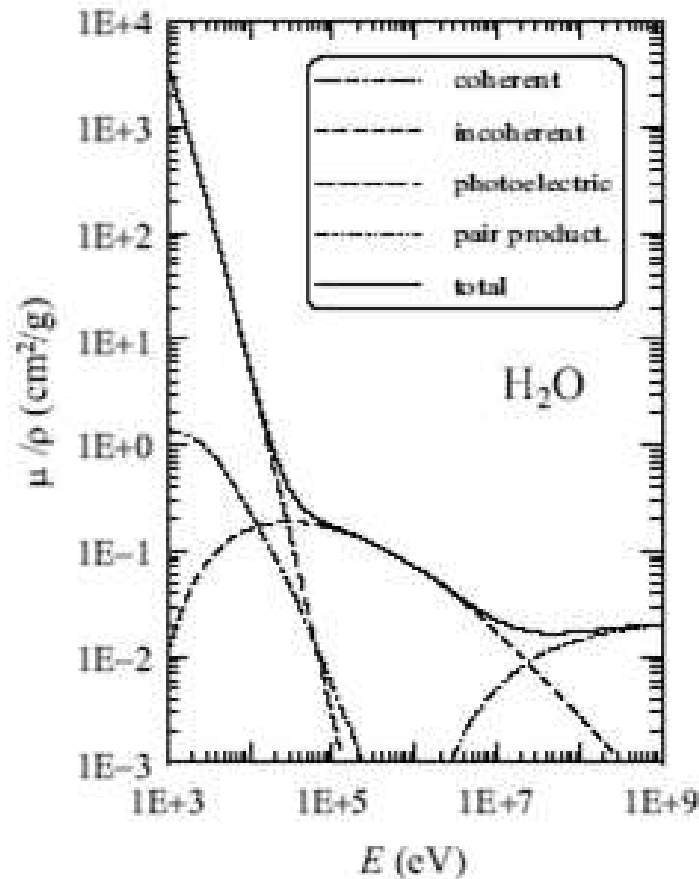
$$\frac{\mu_{en}}{\rho} = \frac{\mu_{tr}}{\rho} (1 - g)$$

Estas pérdidas son las producidas por procesos como bremsstrahlung o aniquilación en vuelo. Recordemos que para materiales con Z bajo y energías no muy altas el coeficiente de absorción y transferencia de energía son prácticamente iguales.

hv (MeV)	agua	aire	carbono
≤ 0,4	< 10 ⁻³	< 10 ⁻³	< 10 ⁻³
0,5	0,001	0,001	0,001
¹³⁷ Cs	0,001 ₅	0,002	0,001 ₅
1,0	0,002	0,002 ₅	0,002
⁶⁰ Co	0,003	0,003	0,002 ₅
1,5	0,003 ₅	0,004	0,003

Coeficientes de atenuación total y parciales

El coeficiente de atenuación en un material será la suma de los coeficientes de atenuación parciales debidos a cada proceso de interacción. En el caso de compuesto habremos de calcular cada contribución de acuerdo a la proporción en peso de cada átomo. (ver programa XCOM del NIST)



Coeficientes de atenuación total y parciales

Salida gráfica de XCOM. Realiza una interpolación tipo spline de las secciones eficaces en coordenadas log-log.

