

TEMA 3 – ELECTROSTÁTICA

- Ley de Gauss -

Temario

2

4. Ley de Gauss

- ▣ Concepto de flujo eléctrico
- ▣ Flujo eléctrico de una carga puntual
- ▣ Enunciado de la Ley de Gauss
- ▣ Aplicaciones de la Ley de Gauss
- ▣ Carga y campo eléctrico en conductores

Flujo del campo eléctrico

3

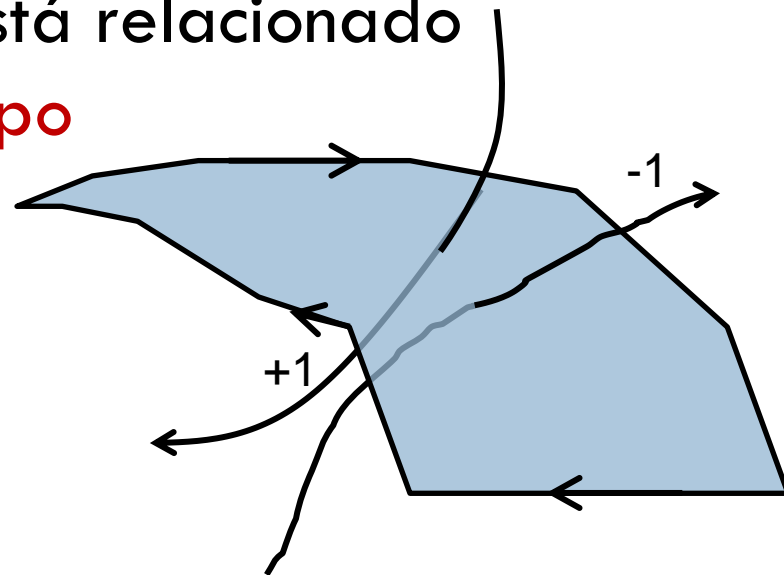
- **Definición:** El flujo de un campo vectorial \vec{A} a través de una superficie S es:

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Dirección: Perpendicular a S
Módulo: dS

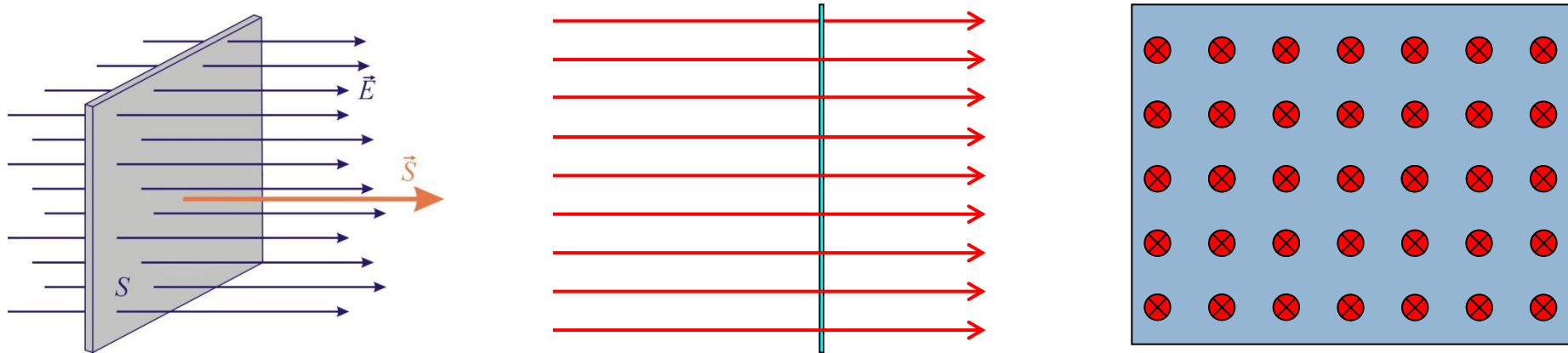
- El flujo de un campo eléctrico está relacionado con el **número de líneas de campo que atraviesan la superficie**

- Se mide en **$\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$**



Flujo de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie plana perpendicular

4



$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S$$

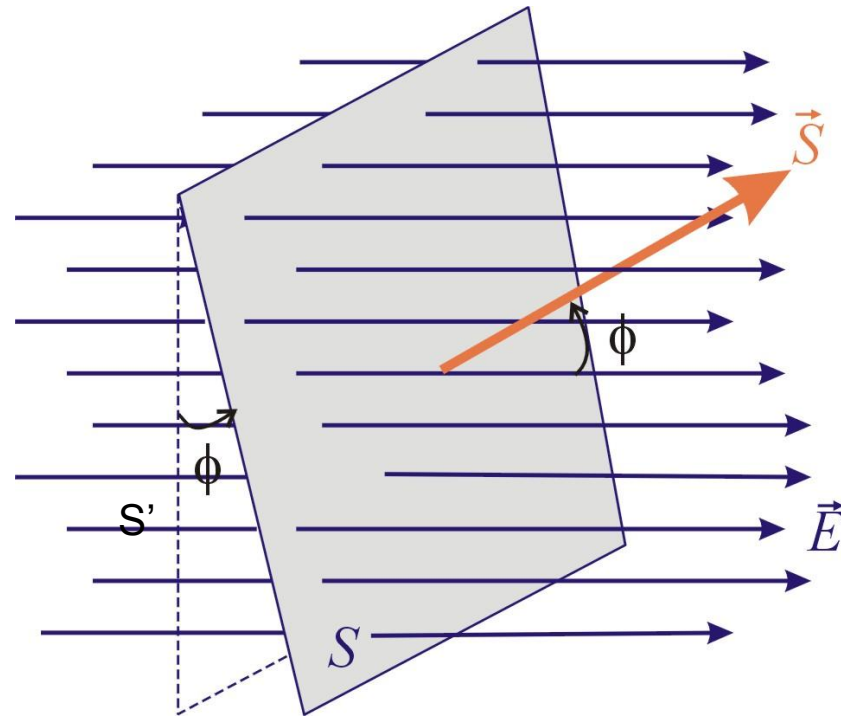
⊙ Sale
⊗ Entra

- El campo eléctrico
 - El flujo eléctrico
- es proporcional al número de líneas
- por unidad de área que atraviesan la superficie

$$\Phi = E \left(\frac{n^{\circ} \text{ líneas que cor tan}}{m^2 \text{ Sup. perp.}} \right) \times S (m^2 \text{ Sup. perp.}) = E S$$

Flujo de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie plana oblicua

5



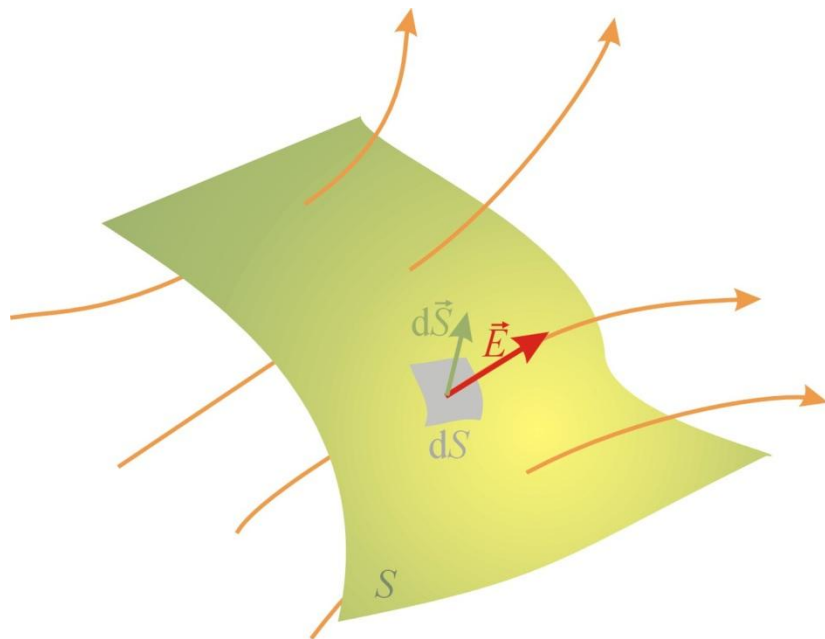
El flujo a través de S' es el mismo que a través de S :

$$\Phi = E \cdot S \cdot \cos\phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

Flujo de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie cualquiera

6

Si la superficie no es plana ni el campo eléctrico es uniforme, se **divide la superficie en elementos diferenciales** en los que se cumplen las condiciones anteriores



- Flujo a través de una superficie diferencial:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- Por tanto:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

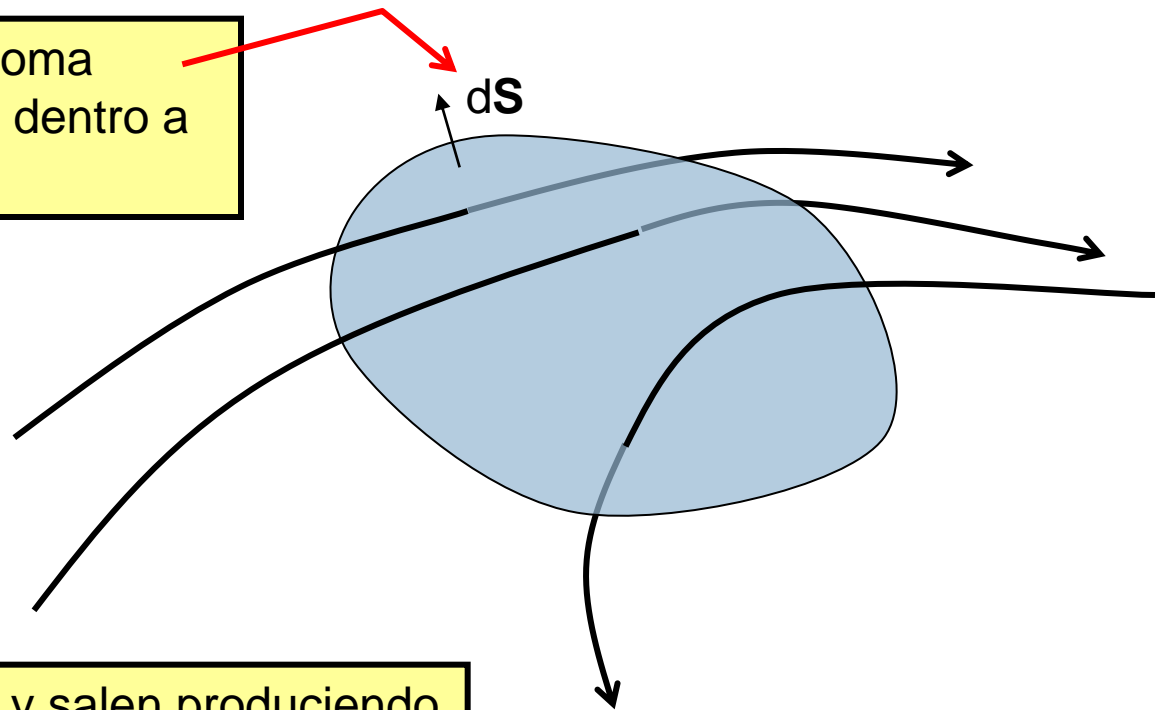
Flujo a través de una superficie cerrada

7

El vector superficie se toma siempre con sentido de dentro a afuera

Si dentro de la superficie cerrada no hay carga eléctrica neta el flujo es cero

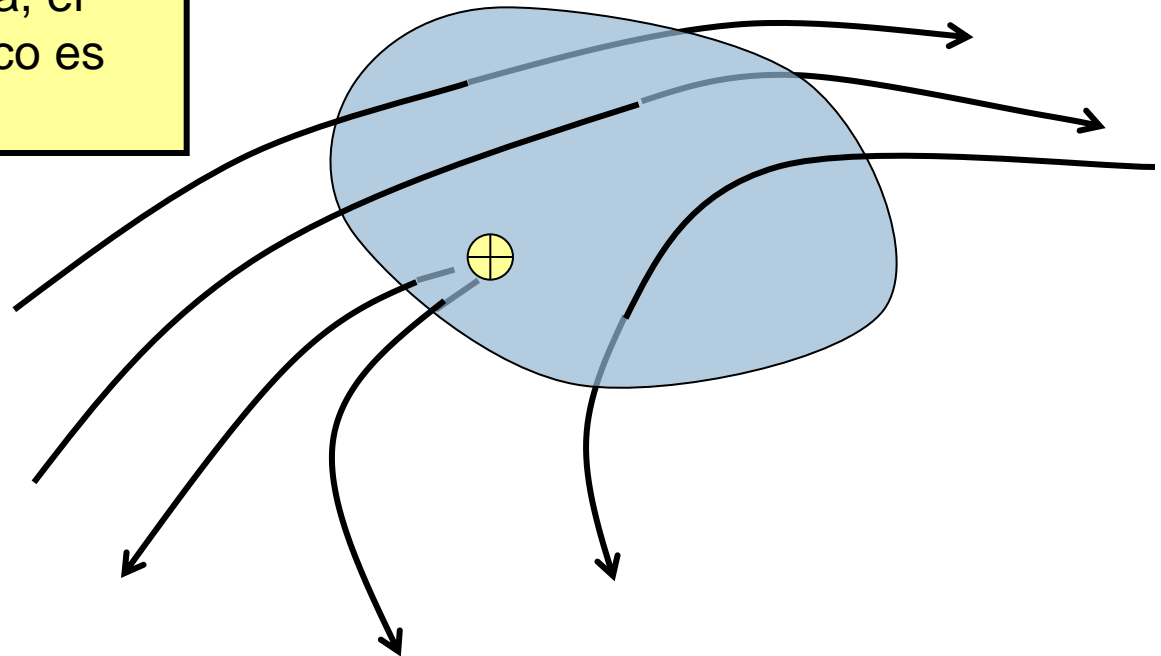
Todas las líneas entran y salen produciendo un flujo cero (-1 al entrar y +1 al salir)



Flujo a través de una superficie cerrada

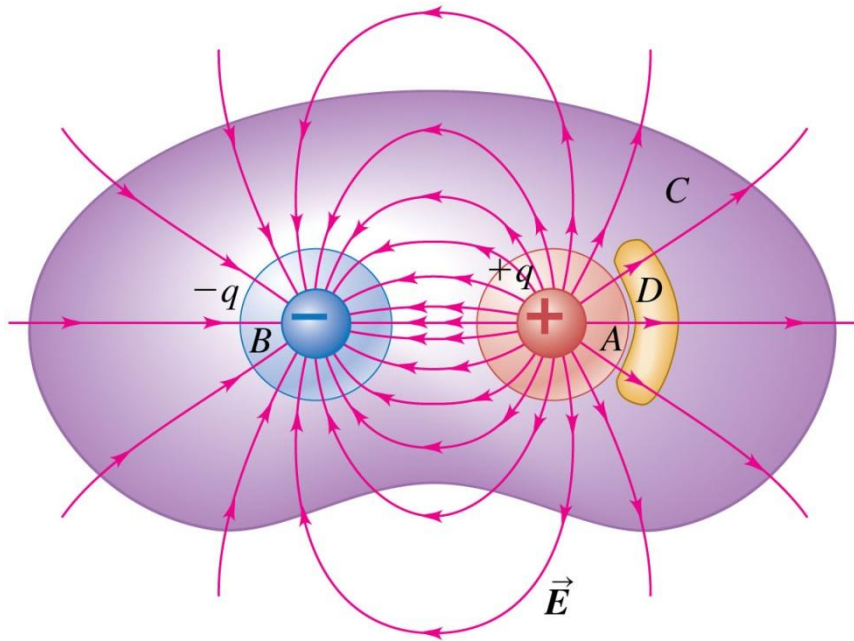
8

Si dentro de la superficie cerrada hay carga neta, el flujo del campo eléctrico es distinto de cero



Flujo a través de una superficie cerrada

9



© 2012 Pearson Education, Inc.

□ Decir para qué superficies existe un flujo neto debido al campo eléctrico no nulo:

□ A ✓

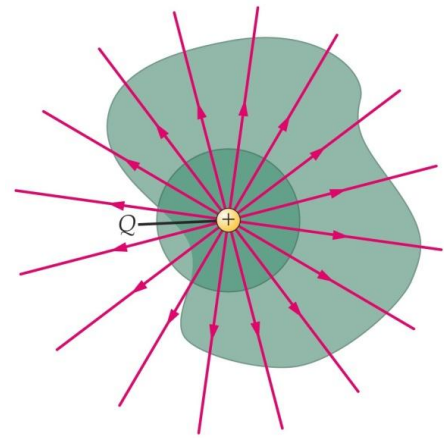
□ B ✓

□ C ✗

□ D ✗

Flujo del campo eléctrico creado por una carga puntual

10

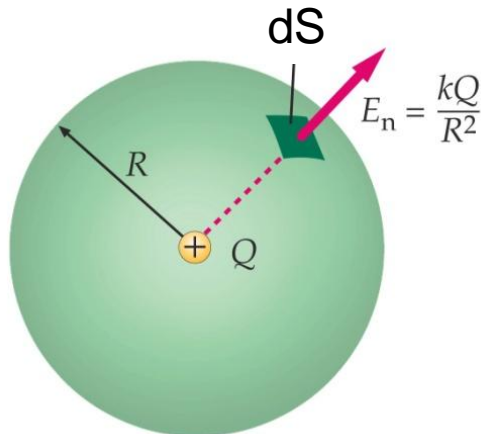


- El flujo no depende de la superficie cerrada que tomemos, porque todas las superficies cerradas en torno a la carga puntual son cortadas por todas las líneas de campo

- Todas las líneas que aparecen (o desaparecen) en la carga puntual cruzan la superficie una sola vez

- Elegimos entonces para calcular el flujo una **superficie esférica** de radio R con centro en la carga:

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \oiint_S E dS = \\ &= E \oiint_S dS = k \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kQ\end{aligned}$$



$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \text{Independiente del radio de la esfera}$$

$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ m}^{-2} \text{ N}^{-1} \rightarrow$ Permitividad del vacío

Flujo del campo eléctrico creado por una distribución de cargas puntuales

11

- Supongamos que tenemos **N cargas q_i en el interior** de una superficie cerrada (gaussiana)

- ▣ Cada carga producirá un flujo:

$$\Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

- ▣ Debido al principio de superposición el flujo total (número de líneas de campo que atraviesan la superficie) es igual a la suma de los flujos debidos a cada carga:

$$\Phi_i = \sum_i \Phi_i = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

Ley de Gauss

12

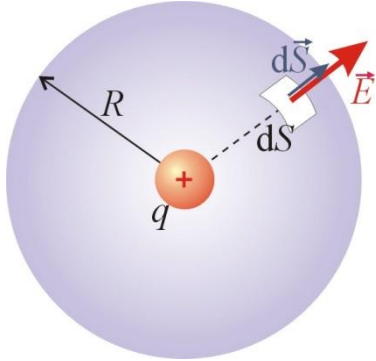
- **El flujo neto a través de cualquier superficie cerrada es igual a la suma de las cargas encerradas en su interior dividido entre ϵ_0**

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i(\textit{interior}) = \frac{Q_{\textit{interior}}}{\epsilon_0}$$

- La ley de Gauss es válida para todas las superficies y distribuciones de carga
 - ▣ Puede utilizarse para calcular el campo eléctrico en distribuciones de carga con alto grado de simetría
- Para cargas eléctricas estáticas la ley de Gauss y la ley de Coulomb son equivalentes
 - ▣ La ley de Gauss es más amplia porque puede utilizarse cuando las cargas están moviéndose aceleradamente

Campo eléctrico de una carga puntual

13



- Construimos una gaussiana esférica centrada en la carga de radio r
- Aplicamos la Ley de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q_{interior}}{\epsilon_0}$$

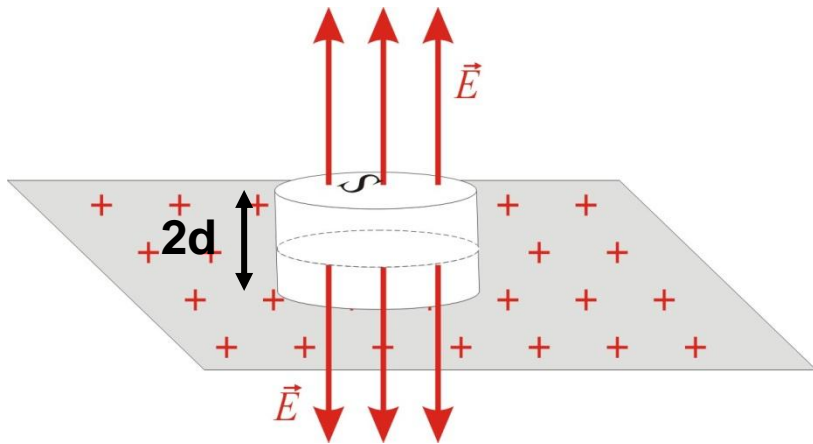
- \vec{E} y $d\vec{S}$ son paralelos
 - ▣ \vec{E} será saliente si $q > 0$, entrante si $q < 0$, y de módulo constante
 - ▣ $d\vec{S}$ será saliente y perpendicular a la superficie
- Por tanto:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \oiint_S E dS = E \oiint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \leftarrow \text{Ley de Coulomb}$$

Aplicaciones de la Ley de Gauss – Simetría plana

14



- Supongamos un plano infinito de carga con una densidad de carga σ
- Construimos un cilindro como la figura
- \vec{E} será perpendicular al plano y saliente
 - ▣ Igual magnitud a igual distancia del plano
 - ▣ No hay flujo eléctrico en los lados

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} d\vec{S} = 2 \oiint_{S_b} \vec{E} d\vec{S} + \cancel{\oiint_{S_l} \vec{E} d\vec{S}} = 2 \oiint_{S_b} E dS = 2ES = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow q_{int} = \sigma \cdot S \Rightarrow 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

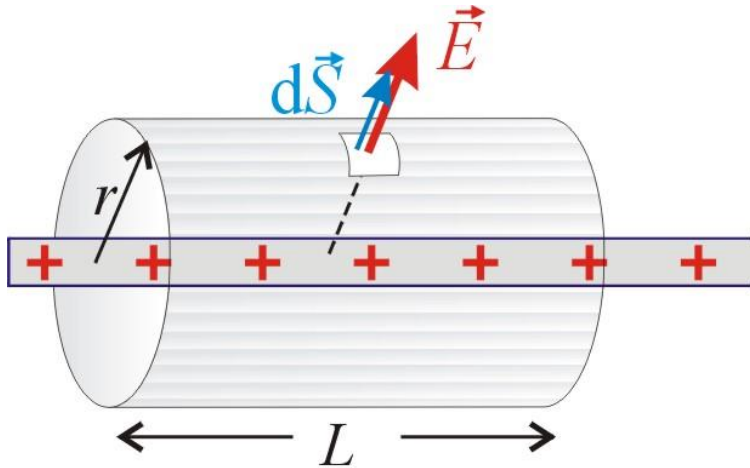
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



**Campo eléctrico a una distancia
próxima a un plano infinito de carga**
(comparar con cálculos anteriores)

Aplicaciones de la Ley de Gauss – Simetría cilíndrica 1

15



- Carga lineal uniforme muy larga de densidad de carga λ
- Construimos un cilindro como la figura
- \vec{E} perpendicular al hilo saliente
 - ▣ Igual magnitud a igual distancia, r
 - ▣ No hay flujo eléctrico en las bases

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} d\vec{S} = 2 \oiint_{S_b} \vec{E} d\vec{S} + \oiint_{S_l} \vec{E} d\vec{S} = \oiint_{S_l} E dS = E S_l = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

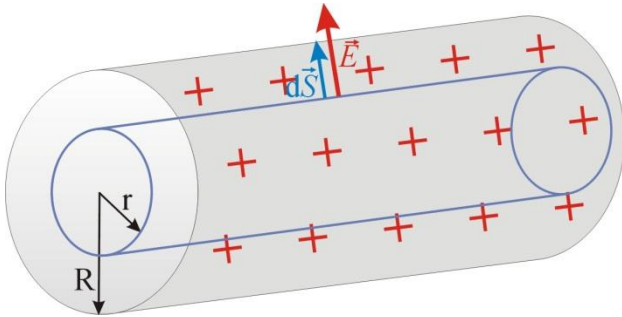
$$q_{int} = \lambda \cdot L, \quad S_l = 2\pi r L \Rightarrow 2E\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

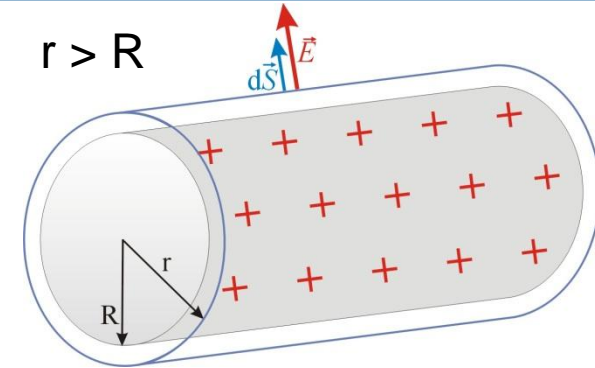
Campo eléctrico a una distancia r de una carga lineal infinita

Aplicaciones de la Ley de Gauss – Simetría cilíndrica 2

16



$r < R$



$r > R$

- Corteza cilíndrica de carga de radio R y densidad de carga superficial σ
- Construimos un cilindro en su interior ($r < R$) y otro exterior ($r > R$)

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} d\vec{S} = 2 \cancel{\oiint_{S_b} \vec{E} d\vec{S}} + \oiint_{S_l} \vec{E} d\vec{S} = \oiint_{S_l} E dS = ES_l = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

- Si $r < R$, $q_{int} = 0$ y por tanto **$E=0$ para puntos interiores**

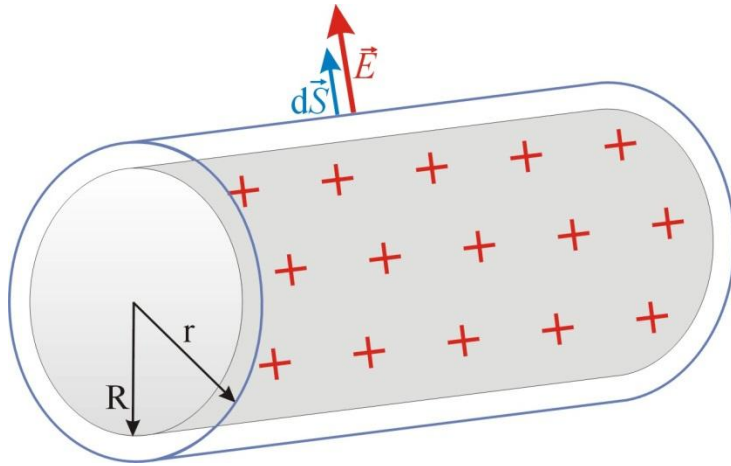
- Si $r > R$, $q_{int} = \sigma \cdot S$, $S = 2\pi RL$, $S_l = 2\pi rL \Rightarrow 2E\pi rL = \frac{\sigma 2\pi RL}{\epsilon_0}$

$$E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \quad r > R$$

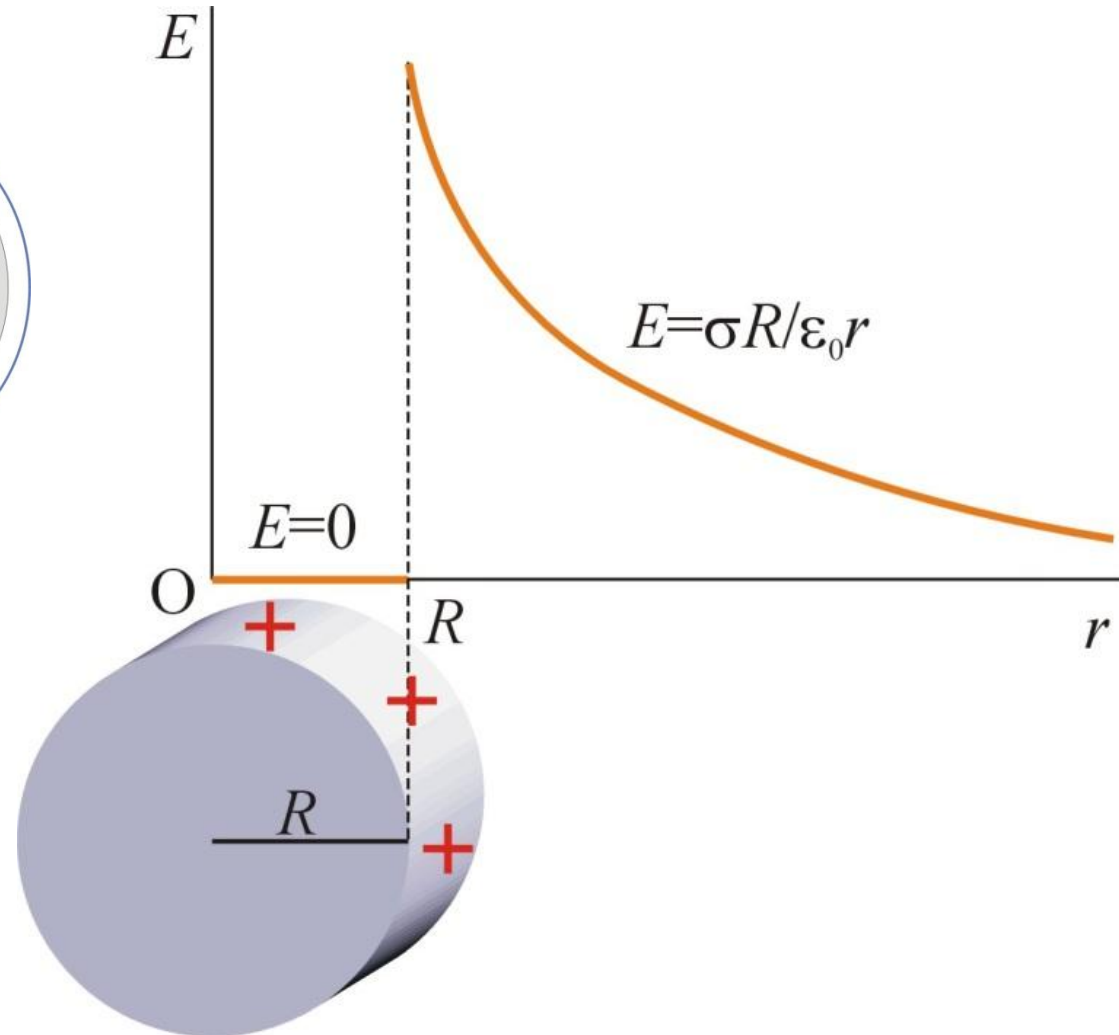
Campo eléctrico alrededor de una corteza de carga ←

Aplicaciones de la Ley de Gauss – Simetría cilíndrica 2

17

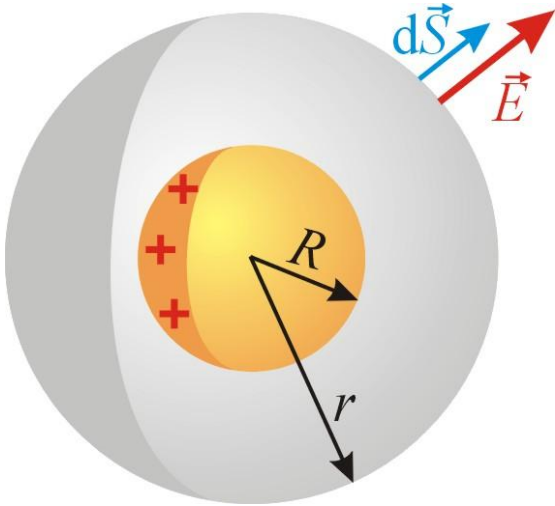


- Representación del campo eléctrico con la distancia



Aplicaciones de la Ley de Gauss – Simetría esférica 1

18



- Corteza de carga esférica de radio R y carga total Q distribuida uniformemente
- \vec{E} perpendicular a la esfera gaussiana
 - ▣ Igual magnitud a igual distancia, r

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \oiint_S E dS = ES = E4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

- Si $r < R$, $q_{int} = 0$ y por tanto **$E=0$ para puntos interiores**
- Si $r > R$, $q_{int} = Q \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$

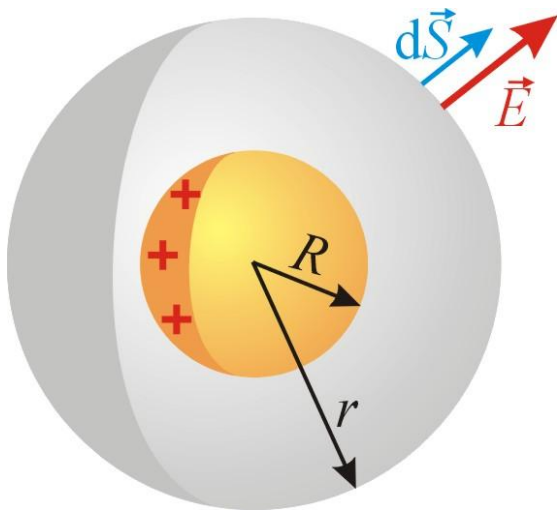
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Campo eléctrico a una distancia r de una esfera cargada

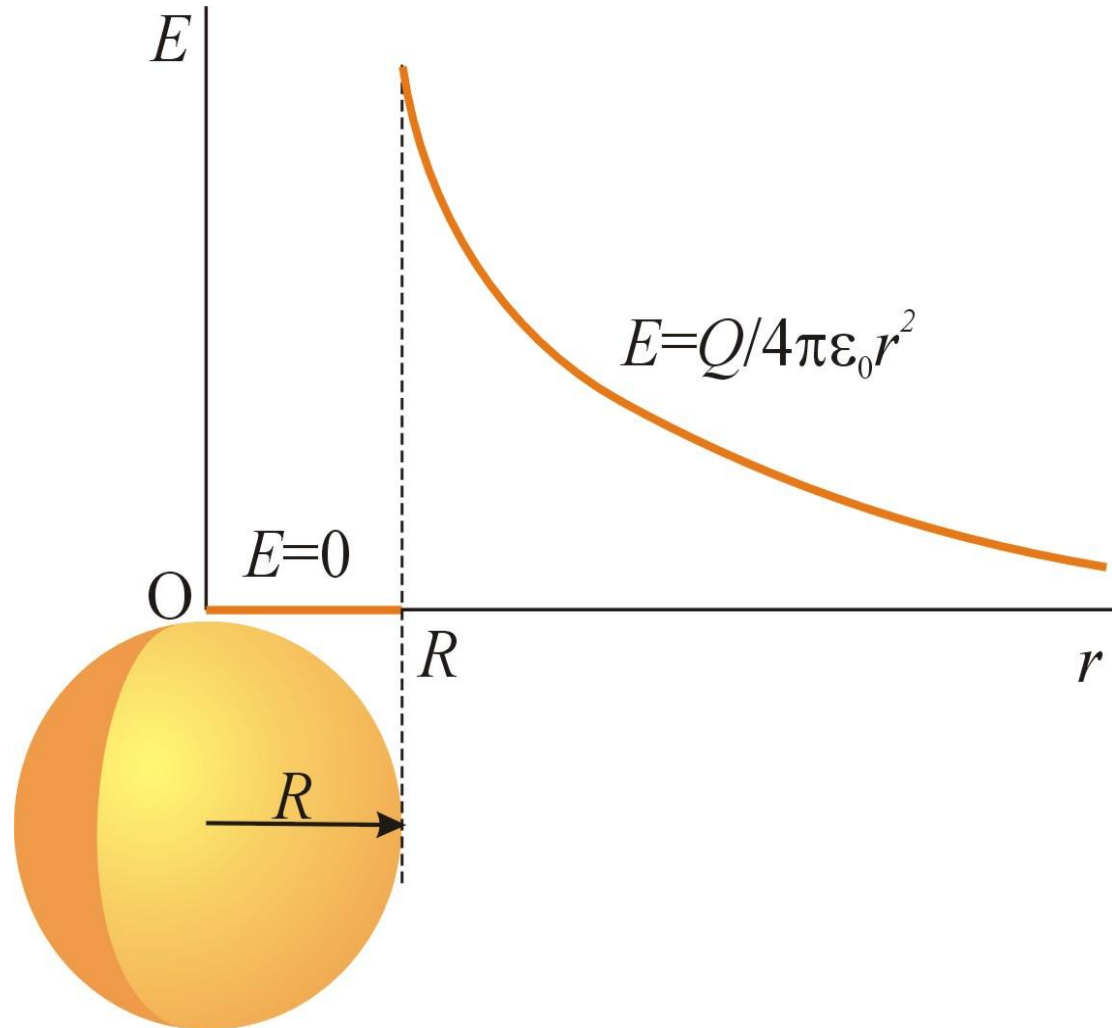
\rightarrow Idéntica a una carga puntual

Aplicaciones de la Ley de Gauss – Simetría cilíndrica 2

19

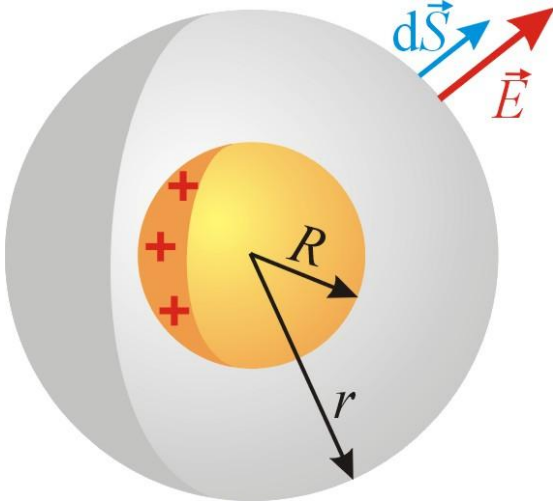


- Representación del campo eléctrico con la distancia



Aplicaciones de la Ley de Gauss – Simetría esférica 2

20



- Esfera sólida de radio R uniformemente cargada (Q , ρ)

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

- \vec{E} perpendicular a la esfera gaussiana
 - ▣ Igual magnitud a igual distancia, r

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \oiint_S E dS = ES = E4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

- Si $r > R$, $q_{int} = Q \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$

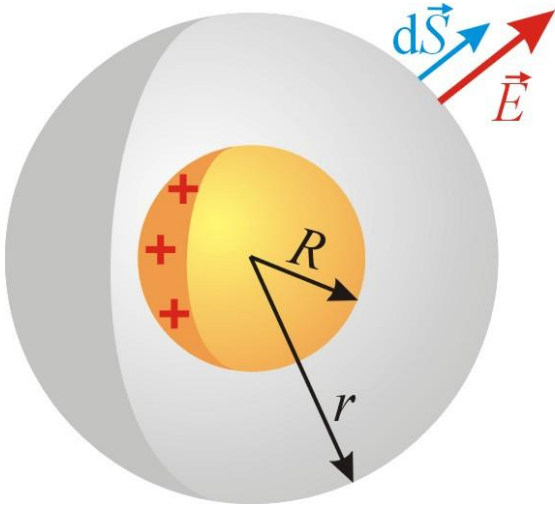
$$\rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \text{ en puntos exteriores}$$

- Si $r < R$, $q_{int} = \frac{Q}{V_{esf}} V_{gau} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3}$

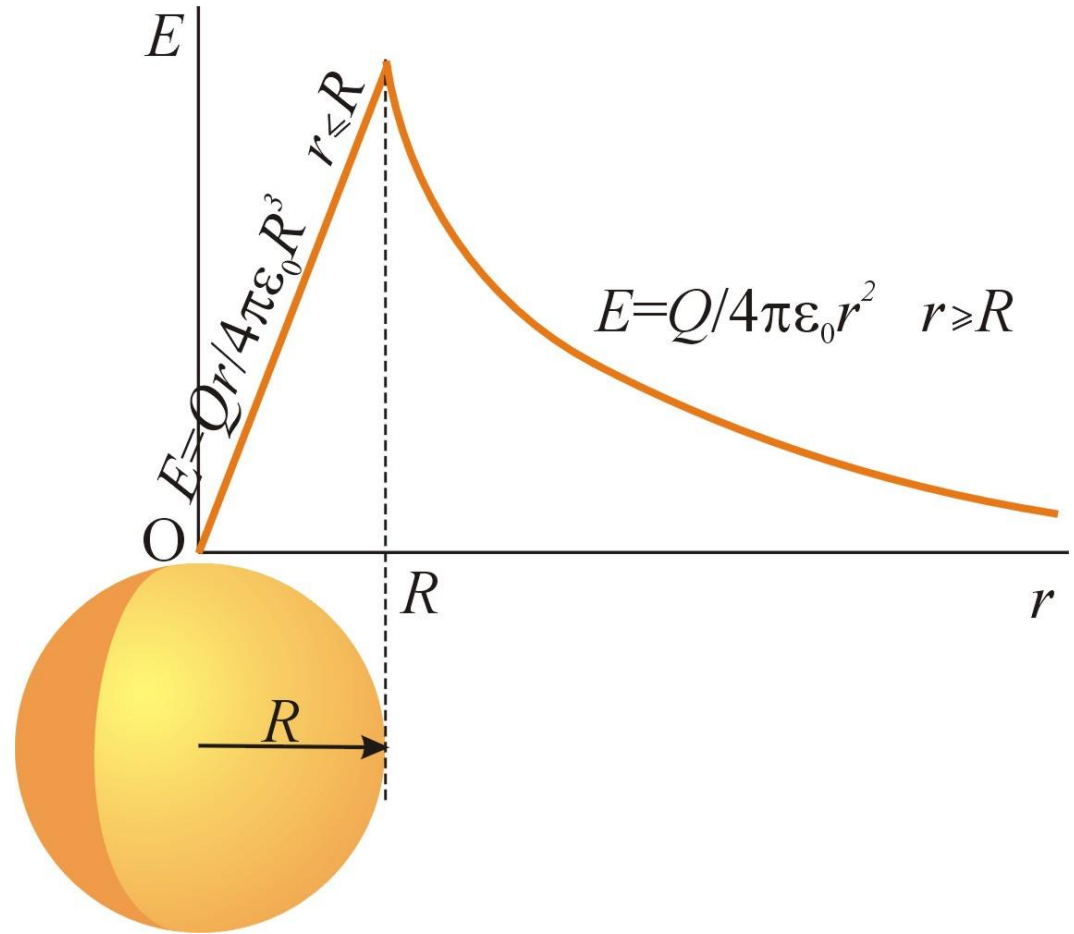
$$\rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r \text{ en puntos interiores}$$

Aplicaciones de la Ley de Gauss – Simetría cilíndrica 2

21



- Representación del campo eléctrico con la distancia



Carga y Campo eléctrico en conductores en equilibrio

22

El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio es nulo:

$$\vec{E} = 0$$

¿Por qué?

Conductor en **equilibrio**



No hay corrientes eléctricas; la carga no se mueve

Si el campo fuera distinto de cero habría corrientes eléctricas y el conductor no estaría en equilibrio



$$\vec{E} = 0$$

¿Cómo será el campo eléctrico en la superficie del conductor?

Carga y Campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio

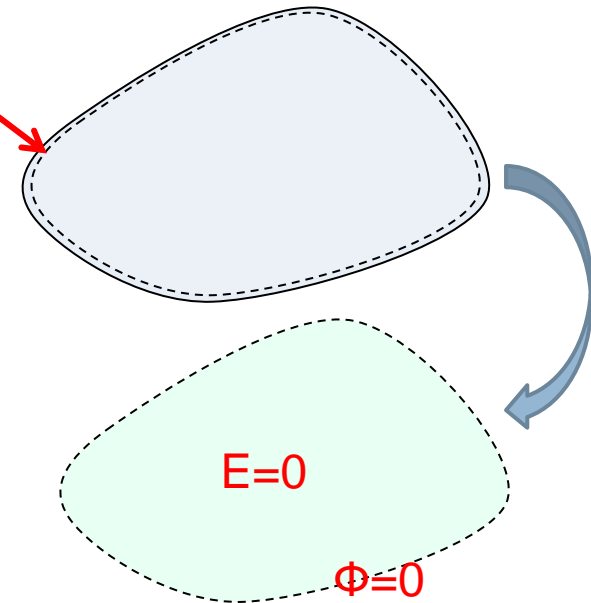
23

- La carga eléctrica en el **interior** de un conductor en equilibrio es **nula**
- La carga en un conductor cargado en equilibrio se encuentra **distribuida en la superficie**

Elegimos una superficie gaussiana interior al conductor e infinitamente cerca de la superficie

Como el campo en el interior es nulo, el flujo a través de la superficie gaussiana es nulo

$$\text{Si } \Phi = 0 \Rightarrow \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{Q_{\text{interior}} = 0}$$

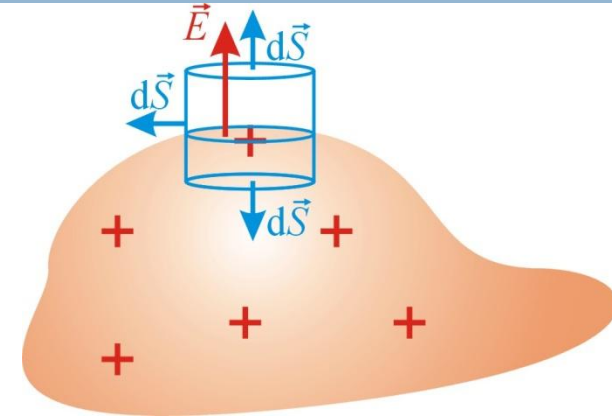


Por lo tanto la carga estará en la **superficie**

Campo eléctrico en la superficie de un conductor

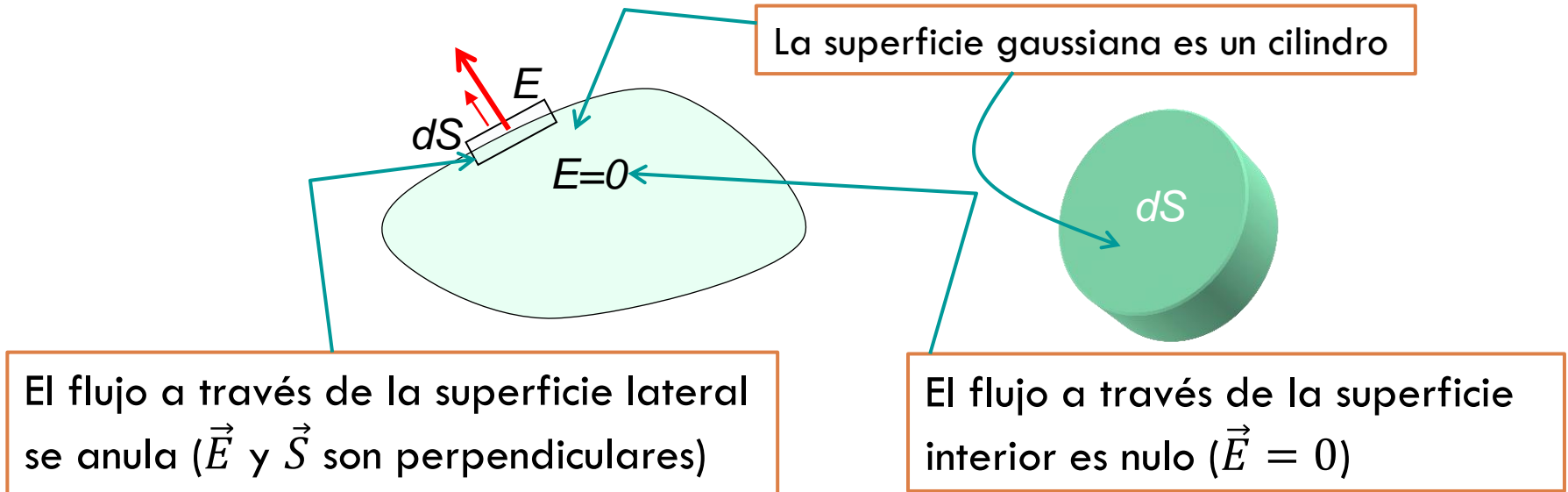
24

- El campo en la superficie tiene que ser perpendicular a la misma
- Si no fuera así:
 - ▣ Descomponemos \vec{E} en $\vec{E}_{||}$ y \vec{E}_{\perp}
 - ▣ Si $\vec{E}_{||} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_{||} \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \neq 0$, por tanto las cargas se moverían y el conductor no estaría en equilibrio
- Utilizamos la Ley de Gauss para calcular el campo en la superficie
 - ▣ Siempre podemos dividir la superficie en discos infinitesimales
 - ▣ Construimos cilindros cuyas bases sean paralelas a los discos



Campo eléctrico en la superficie de un conductor

25



$$\Phi = \iint_{S_{bint}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_l} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{bext}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{bext}} ES = ES_b = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$
$$q_{int} = \sigma S_b$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

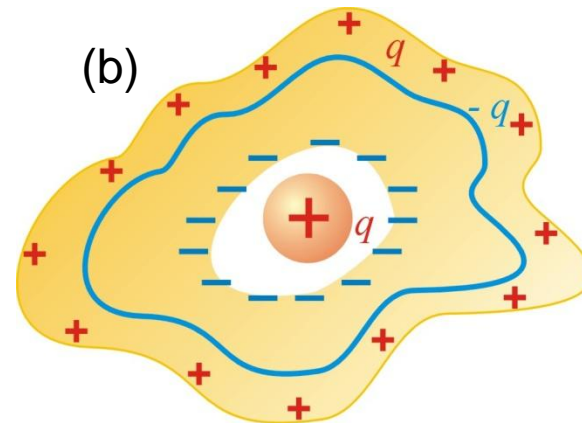
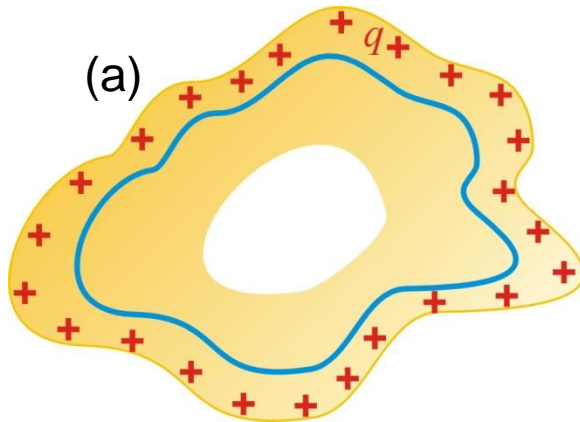
Campo eléctrico justamente en el exterior de un conductor cargado

Campo eléctrico en la superficie de un conductor - Discusión

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Campo eléctrico justamente en el exterior de un conductor cargado

- Es el doble del creado por un plano infinito cargado uniformemente
- (a) ¿Qué ocurre si el conductor tiene una cavidad en su interior?
- (b) ¿Y si ponemos una carga en la cavidad interior?



Problema - (Tipler prob. 22-66 pag. 664)

27

Consideremos las tres esferas conductoras concéntricas de la figura. La esfera I es sólida con radio R_1 . La esfera II es hueca y tiene radio interno R_2 y radio externo R_3 y la esfera III es hueca con radios R_4 y R_5 . Inicialmente las tres esferas tienen una carga nula. A continuación añadimos una carga $-Q_0$ a la esfera I y una carga positiva $+Q_0$ en la esfera III.

- (a) Una vez que el sistema está en equilibrio, el campo eléctrico entre las esferas I y II ¿está dirigido hacia el centro, se aleja del centro o ninguna de las dos cosas?
- (b) ¿cuál será la carga de la superficie interna de la esfera II?
- (c) ¿Cuál será la carga de la superficie externa de la esfera II?
- (d) ¿Cuál será la carga en la superficie interna de la esfera III?
- (e) ¿Cuál será la carga de la superficie externa de la esfera III?
- (f) Representar E en función de r

