

Medida del proceso $t\bar{t} + tW$ en el experimento CMS del LHC

$t\bar{t} + tW$ process measurement in CMS experiment of LHC

Irene Arellano Jiménez



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Trabajo Fin de Grado
Curso 2018-2019

tutorizado por
Víctor Rodríguez Bouza y
Enrique Palencia Cortezón
Universidad de Oviedo

Resumen

El primer objetivo fundamental de este trabajo es estudiar de forma conjunta los procesos tW y $t\bar{t}$ a NLO a través de la medida de su sección eficaz diferencial dependiendo de diferentes observables. Se compara esta medida con simulaciones de Montecarlo a nivel de detector y a nivel de partícula que modelizan estos procesos de forma independiente y los procesos de fondo presentes en las medidas. Los observables físicos respecto a los cuales se va a medir la sección diferencial son el momento transverso del *leading* leptón, el momento transverso del *leading* b -jet y la masa minimax (función de las masas invariantes de las partículas del estado final). El segundo objetivo fundamental es estudiar una región sensible a los diagramas de Feynman que interfieren a NLO entre ambos procesos gracias al observable masa minimax ya que, como se verá, actúa de discriminante entre los procesos tW y $t\bar{t}$.

Se utilizan los datos extraídos durante 2016 en el detector CMS del LHC con un valor de la luminosidad integrada de 35.9 fb^{-1} . Se define una región de señal adecuada para estudiar ambos procesos sin apenas fondo (que se sustrae gracias a las simulaciones de los procesos de fondo). Se aplica un método matemático basado en mínimos cuadrados para corregir los histogramas del efecto intrínseco que introduce el detector CMS en los datos; este método se llama *unfolding*. Solo se consideran incertidumbres estadísticas en todo caso.

Los resultados muestran bastante acuerdo en la forma entre las predicciones teóricas de los procesos y los datos experimentales sin fondo. Era esperable que no hubiera un acuerdo total ya que no se han tenido en cuenta las incertidumbres sistemáticas que previsiblemente aumentarían considerablemente las barras de incertidumbre de los datos. No obstante, es necesario contrastar los resultados con otros modelos, añadir otras incertidumbres que no se están teniendo en cuenta y conseguir una mayor sensibilidad en las medidas que aumente la fiabilidad de lo que aquí se presenta.

Este análisis, sin duda, supone un avance en la comprensión de los procesos tW y $t\bar{t}$ y la colaboración continuará con su estudio en esta línea a medida que se vayan obteniendo más simulaciones de los procesos, como por ejemplo la simulación del estado final de cuatro leptones y dos b -jets a NLO, y mejores precisiones en las medidas de los datos.

Índice general

Resumen	I
Índice general	III
Índice de figuras	VI
Índice de tablas	VIII
Introducción	1
1. El modelo estándar	3
1.1. Tipos de partículas	4
1.1.1. Los fermiones	4
1.1.2. Los bosones	5
1.2. Los hadrones y los <i>jets</i>	6
1.3. Tipos de interacciones	8
1.3.1. Electromagnética	9
1.3.2. Fuerte	9
1.3.3. Débil	10
2. Medida de secciones eficaces en física de altas energías	11
2.1. Definición de sección eficaz	11
2.2. Señal y fondo	12
2.3. Física del <i>quark top</i>	13
2.3.1. Producción de pares <i>top-antitop</i>	14
2.3.2. Producción individual de <i>quarks top</i>	14
2.3.3. Secciones eficaces de producción del <i>quark top</i>	15
2.3.4. Procesos tW y $t\bar{t}$	17
3. Dispositivo experimental	19

3.1.	Acelerador LHC	19
3.1.1.	Luminosidad	20
3.2.	Detector CMS	21
3.2.1.	Composición interna	22
3.2.2.	Sistema de referencia	24
3.2.3.	Observables físicos notables	25
3.2.4.	Disparador y apilamiento	26
3.3.	Reconstrucción de partículas: <i>Particle Flow</i>	28
3.4.	Simulaciones de Montecarlo	31
4.	<i>Unfolding</i>	35
4.1.	Motivación física	35
4.2.	Formulación del problema	36
4.2.1.	Histograma real	37
4.2.2.	Histograma experimental	38
4.2.3.	Variables	39
4.3.	Solución directa	42
4.4.	Factores de corrección	45
4.5.	Regularización	48
4.5.1.	Varias funciones de regularización	49
4.5.2.	Características de los estimadores	51
4.5.3.	Elección del valor del parámetro de regularización	53
4.6.	Algoritmo: TUnfold	54
4.6.1.	Características	54
4.6.2.	Resolución del lagrangiano	55
4.6.3.	Inicialización del algoritmo	57
4.6.4.	Regularización	57
5.	Análisis	59
5.1.	Metodología	59
5.1.1.	Implementación computacional	59
5.1.2.	Datos y simulaciones	60
5.1.3.	Criterios de identificación de objetos, región de señal y extracción de señal	61
5.1.4.	Observables físicos analizados	63
5.1.5.	Método de <i>unfolding</i>	64
5.2.	Resultados	67
5.2.1.	Comparaciones datos-simulaciones	67

5.2.2. Sección eficaz diferencial a nivel de detector	69
5.2.3. Sección eficaz diferencial a nivel de partícula	71
Conclusiones	77
Referencias y otra bibliografía consultada	79
Índice temático	83

Índice de figuras

1.1.	Representación de la composición de: a) protón, b) neutrón([27]).	7
1.2.	Representación de la producción de un <i>jet</i> ([19]).	8
1.3.	Inverso de la intensidad de las constantes de acoplamiento en función de la energía ([52]).	10
2.1.	Diagramas de Feynman a LO de la producción de pares $t\bar{t}$ para fusión de gluones (a,b) y fusión de <i>quarks</i> (c) ([37]).	14
2.2.	Diagramas de Feynman a LO de la producción <i>single top</i> en el «canal-t» (a), el «canal-s» (b) y el «canal-tW» (c,d) ([37]).	15
2.3.	Diagramas de Feynman a NLO de los procesos de producción de pares $t\bar{t}$ e individual de <i>quarks top</i> en el «canal-tW» ([44]).	17
3.1.	Luminosidad integrada total del LHC y medida en CMS en 2016 ([21]).	21
3.2.	Sección de CMS en la que se representan las trayectorias de las partículas detectables ([42]).	24
3.3.	Sistema de coordenadas utilizado en CMS ([26]).	25
3.4.	Distribución del apilamiento producido en las colisiones detectadas en CMS en 2016 ([21]).	28
3.5.	Deposiciones de energía de distintas partículas en CMS ([20]).	31
3.6.	Esquema de las partes de una colisión principal p-p que deben ser simuladas ([47]).	32
4.1.	Esquemmatización del procedimiento de <i>unfolding</i> ([41]).	37
4.2.	Elementos fundamentales del problema: 1. Histograma real, 2. Matriz de respuesta, 3. Histograma experimental, 4. Histograma estimado según el método <i>unfolding</i>	44
4.3.	Inversión entre los espacios real y experimental.	45
4.4.	Elementos fundamentales del problema: 1. Histograma real, 2. Histograma experimental, 3. Factores de corrección, 4. Histograma estimado	47
4.5.	Solución del problema para los distintos «cuantificadores»: 1. MSE , 2. MSE' , 3. $\Delta\chi_{eff}^2$, 4. χ_b^2	53

5.1.	Izquierda: estimación de la distribución la masa minimax ([44]). Derecha: distribución normalizada de la masa minimax con las simulaciones de Montecarlo de CMS a nivel de partícula.	64
5.2.	Histograma en número de sucesos de los observables momento transverso del <i>leading</i> leptón.	67
5.3.	Histograma en número de sucesos de los observables momento transverso del <i>leading</i> b- <i>jet</i>	68
5.4.	Histograma en número de sucesos del observable masa minimax.	68
5.5.	Sección eficaz diferencial respecto del observable momento transverso del <i>leading</i> leptón (izquierda) y del <i>leading</i> b- <i>jet</i> (derecha).	70
5.6.	Sección eficaz diferencial respecto del observable masa minimax.	71
5.7.	Estabilidad y pureza de los observables momento transverso del <i>leading</i> leptón (arriba izquierda) y del <i>leading</i> b- <i>jet</i> (arriba derecha) y masa minimax (abajo).	72
5.8.	Matriz de respuesta del observable momento transverso del <i>leading</i> leptón.	73
5.9.	Matriz de respuesta del observable momento transverso del <i>leading</i> b- <i>jet</i>	73
5.10.	Matriz de respuesta del observable masa minimax.	74
5.11.	Sección eficaz diferencial a nivel de partícula respecto de los observable momento transverso del <i>leading</i> leptón (izquierda) y <i>leading</i> b- <i>jet</i> (derecha).	75
5.12.	Sección eficaz diferencial a nivel de partícula respecto del observable momento transverso del <i>leading</i> b- <i>jet</i>	76

Índice de tablas

1.1.	Características de las partículas leptónicas ([37])	4
1.2.	Características de los <i>quarks</i> ([37])	5
1.3.	Características de los bosones ([37])	5
2.1.	Secciones eficaces de la producción de pares de <i>quarks top-antitop</i> ([2], [39], [40] y [46]) e individual de <i>quarks top</i> por los tres canales más probables ([1], [2], [33], [36], [40] y [43]) predichas a $\sqrt{s} = 13$ TeV. 16	16
2.2.	Secciones eficaces de la producción de pares de <i>quarks top-antitop</i> ([16]) e individual de <i>quarks top</i> por el «canal-t» ([14]) y por el «canal-tW» ([15]) medidas en CMS a $\sqrt{s} = 13$ TeV.	16
5.1.	Muestras de las simulaciones de Montecarlo a nivel de detector.	61
5.2.	Números de condición de las matrices de respuesta.	74

Introducción

Este trabajo se sitúa dentro del área de conocimiento del Grupo Experimental de Altas Energías de la Universidad de Oviedo y dentro del contexto de las asignaturas (de los grados de Matemáticas y Física) de Física Nuclear y de Partículas Elementales, Física de altas energías y aceleradores, Análisis Numérico Matricial, Métodos Numéricos y Probabilidades y Estadística.

Tradicionalmente, en física de altas energías, se han estudiado experimentalmente los problemas cuánticos únicamente identificando los sucesos por su estado final y la reconstrucción del estado inicial, sin tener en cuenta lo que sucedía interiormente en ellos. Con este procedimiento, los procesos tW y $t\bar{t}$, que en teoría tienen naturaleza diferente en origen, son indistinguibles a NLO ya que algunos de sus estados finales son idénticos (las medidas no han permitido diferenciarlos hasta la fecha). Estudiar los procesos a NLO y, en general, a mayor orden si se pudiera, tiene importancia porque se gana precisión en los resultados y se ponen a prueba los modelos teóricos existentes. En particular, estos procesos tienen importancia en sí mismos porque ayudan a conocer mejor el *quark top* (que es la partícula elemental más pesada) y sus propiedades. Además, son procesos que aparecen como señal o como fondo en casi todos los procesos de colisiones protón-protón que se estudian en CMS, por lo tanto, es importante entenderlos bien y aumentar, en la medida de lo posible, valga la redundancia, la precisión de las medidas.

En este trabajo se ha desarrollado un método que permite medir la sección eficaz diferencial respecto a diversos observables físicos que caracterizan los sucesos que se detectan y contrastarlo con algunos de los modelos de simulaciones desarrollados por la colaboración CMS. En el documento, se muestran los resultados obtenidos para tres observables físicos importantes y uno de ellos, función de las masas invariantes de las partículas, es interesante porque consigue diferenciar regiones donde los diagramas a NLO que interfieren tienen diferentes.

Cabe destacar que el código está realizado de manera que se puede aplicar a otros muchos observables físicos si así fuera deseado en futuras ocasiones.

El trabajo se estructura como sigue:

- El capítulo 1 expone cualitativamente las características de la teoría vigente actualmente en física de altas energías: el modelo estándar (SM) y las partículas que lo conforman.

- El capítulo 2 introduce los conceptos de sección eficaz, señal, fondo y región de señal (imprescindibles para este estudio) y la física del *quark top*, en particular, la definición de los procesos tW y $t\bar{t}$.
- El capítulo 3 introduce el dispositivo experimental que se utiliza en el trabajo: el detector de propósito general CMS del colisionador de partículas LHC y describe sus características más relevantes para este trabajo.
- El capítulo 4 introduce el método de *unfolding*: su utilidad, su resolución matemática y sus diversas variaciones cuando las condiciones ed los datos no son óptimas.
- El capítulo 5 presenta los resultados obtenidos tras citar la metodología específica utilizada en este estudio.

Capítulo 1

El modelo estándar

El modelo estándar o **SM** (del inglés, *Standard Model*) es una teoría cuántica de campos o **QFT** (del inglés, *Quantum Field Theory*) que comenzó a desarrollarse en 1897 con el descubrimiento del electrón, cogió forma durante el siglo XX y se formuló, tal y como se conoce actualmente, en los años 70. La QFT es una disciplina de la física que aplica los principios de la mecánica cuántica a los sistemas clásicos de campos continuos; está definida por un **lagrangiano**¹ que en el caso del SM consta de dos factores que se corresponden con la subteoría responsable de la interacción fuerte (**QCD**, del inglés *Quantum Chromodynamics*) y la de las interacciones electromagnética y débil (**QED**, del inglés *Quantum Electrodynamics*).

El SM se considera uno de los mayores aciertos de la física moderna ya que logra explicar adecuadamente un amplio rango de fenómenos para escalas de energía desde pocos electronvoltios hasta varios teraelectronvoltios. En líneas generales, hace un estudio de las **partículas elementales** que forman el mundo conocido, es decir, de las partículas que no pueden ser descompuestas en otras más pequeñas; a través de ellas, da una explicación de algunas de las interacciones conocidas.

Cabe destacar que muchas de las partículas predichas por la teoría no fueron halladas experimentalmente hasta más tarde. Por ejemplo, el *quark top* fue descubierto en 1995 en una colaboración entre CMS y D0 ([11] y [23] respectivamente) y el bosón de Higgs, en 2012 en los detectores ATLAS ([7]) y CMS ([17]) del LHC. Tanto de estas como de todas las demás partículas elementales se hablará más en profundidad en la siguiente subsección.

¹Un lagrangiano es una función escalar a partir de la cual se puede obtener la evolución temporal, las leyes de conservación y otras propiedades importantes de un sistema dinámico. De hecho, en física moderna el lagrangiano se considera el operador más fundamental que describe un sistema físico.

1.1. Tipos de partículas: bosones y fermiones

El SM distingue entre dos grandes conjuntos de partículas elementales cuyas semejanzas y diferencias estudiaremos en esta sección.

1.1.1. Los fermiones

Los **fermiones** son las partículas que forman la materia, tienen espín semi-entero y su distribución se rige según la de Fermi-Dirac.

En función de las características y de las interacciones que sufren, los doce fermiones que existen y sus antipartículas se dividen en leptones (seis) y *quarks* (seis). Internamente, se hace una subclasificación de cada uno de los dos grupos en generaciones (tres). Además, cada partícula tiene asociada una antipartícula que se diferencia de la primera en que tiene carga eléctrica opuesta y carga de color opuesta o «anticolor», en caso de no ser nulas.

- ▷ **Los leptones** sufren las interacciones electromagnética y débil. Cada generación está formada por una partícula de carga eléctrica -1 y su correspondiente neutrino con carga eléctrica nula.

El electrón es la menos pesada de las tres partículas y se considera estable porque nunca se desintegra en otras partículas. Los neutrinos son las partículas elementales más ligeras y es muy difícil detectarlos porque únicamente interaccionan débilmente (no tienen carga eléctrica ni de color). Actualmente solo se ha podido fijar una cota superior de su masa. La tabla 1.1 recoge las características más notables de las seis partículas leptónicas agrupadas en generaciones.

Tabla 1.1: Características de las partículas leptónicas ([37])

Nombre	Electrón	Neutrino del electrón	Muon	Neutrino del muon	Tau	Neutrino del tau
Símbolo	e^-	ν_e	μ^-	ν_μ	τ^-	ν_τ
Masa [MeV/c ²]	0.511	$< 2.2 \cdot 10^{-6}$	105.7	< 0.17	$1.777 \cdot 10^3$	< 15.5
Carga [e]	-1	0	-1	0	-1	0
Espín	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
Antipartícula	e^+	$\bar{\nu}_e$	μ^+	$\bar{\nu}_\mu$	τ^+	$\bar{\nu}_\tau$

Se define un número cuántico aditivo (su suma se conserva en interacciones) llamado **número leptónico** o carga leptónica cuyo valor es +1 para los leptos

nes y -1 para los antileptones. Todas las demás partículas elementales tienen número leptónico nulo.

- ▷ **Los *quarks*** sufren las interacciones: electromagnética, fuerte y débil. Sus características más notables son que tienen carga de color y que no pueden observarse de forma aislada. Se encuentran en agrupaciones con carga de color total nula debido al confinamiento de color o confinamiento cuántico.

La carga de color es la responsable de la interacción fuerte que sufren las partículas. Los *quarks* son los únicos fermiones que tienen carga de color no nula y esta puede ser de seis tipos: «rojo», «azul», «verde» y sus respectivos anticolores («antirrojo» o «cian», «antiazul» o «amarillo», «antiverde» o «magenta»). La interacción fuerte es la responsable de la cohesión de los núcleos y del confinamiento de color que impide poder observar a los *quarks* en libertad.

En la tabla 1.2 se pueden ver los nombres de los seis *quarks* agrupados en generaciones y sus características principales.

Tabla 1.2: Características de los *quarks* ([37])

Nombre Símbolo	<i>Up</i> u	<i>Down</i> d	<i>Charm</i> c	<i>Strange</i> s	<i>Top</i> t	<i>Bottom</i> b
Masa [MeV/c^2]	2.3	4.8	$1.275 \cdot 10^3$	95	$1.731 \cdot 10^5$	$4.18 \cdot 10^3$
Carga [e]	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3
Espín	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
Antipartícula	\bar{u}	\bar{d}	\bar{c}	\bar{s}	\bar{t}	\bar{b}

1.1.2. Los bosones

Los **bosones** son las partículas mediadoras de las interacciones entre los fermiones, tienen espín entero y su distribución se rige según la de Bose-Einstein. Los distintos bosones que existen caracterizan totalmente la interacción que median.

La tabla 1.3 resume la información principal sobre los cinco bosones conocidos.

Tabla 1.3: Características de los bosones ([37])

Nombre Símbolo	Fotón γ	Gluon [g]	Bosón Z [Z^0]	Bosón W [W^\pm]	Higgs [H]
Masa [MeV/c^2]	0	0	$9.12 \cdot 10^4$	$8.04 \cdot 10^4$	$1.26 \cdot 10^5$
Carga [e]	0	0	0	± 1	0
Espín	1	1	1	1	0

- ▷ El **fotón** es la partícula mediadora de la interacción electromagnética entre partículas con carga eléctrica.
- ▷ El **gluon** media en los procesos de interacción fuerte entre partículas con carga de color. Interacciona consigo mismo espontáneamente ya que tiene carga de color. Sin embargo, esta carga es un poco más compleja que la de los *quarks* ya que posee simultáneamente un color y un anticolor distinto; esto da lugar a 8 combinaciones distintas que son los 8 tipos de gluones conocidos.
- ▷ Los **bosones Z** y **W** rigen la interacción débil entre las partículas (todas las partículas tienen carga débil intrínsecamente). Ambos interactúan de manera diferente ya que el primero, sin carga eléctrica, no cambia el sabor de las partículas y media procesos como los de aniquilación. Sin embargo, el segundo, que tiene carga eléctrica, cambia el sabor de las partículas y aparece en procesos como las desintegraciones.
- ▷ El **bosón de Higgs** no tiene ni carga eléctrica, ni de color. Es un tipo de bosón especial ya que su espín es cero, no media ninguna interacción sino que es el responsable del campo de Higgs que es un campo escalar cuántico. El mecanismo de Higgs permite, tras la ruptura espontánea de la simetría electrodébil otorgar de masa a las diferentes partículas. La masa depende de cuánto interactúen con el bosón de Higgs ya que esta interacción es en sí su masa.

1.2. Los hadrones y los *jets*

Un **hadrón** es una partícula subatómica, no elemental formada por *quarks* y gluones que permanecen unidos por interacción nuclear fuerte. Dentro de los hadrones coexisten los *quarks* de mar (nube de todo tipo de partículas elementales con color) y los *quarks* de valencia (caracterizan al hadrón y son los más numerosos). La carga de color total de los hadrones es siempre nula. En función de los *quarks* de valencia, existen dos tipos de hadrones:

- ▷ Los **mesones**, que son fermiones, tienen dos *quarks* de valencia que son un *quark* y un *antiquark*. Como ejemplo significativo de este tipo, se tienen los piones, que son los hadrones más ligeros que existen y los que tienen una probabilidad más alta de formarse en una colisión protón-protón (p-p). Pueden

ser de tres tipos π^+ compuesto por $\{u\bar{d}\}$, π^- compuesto por $\{d\bar{u}\}$ y π^0 que es una combinación de $\{d\bar{d}/u\bar{u}\}$ siendo este último el más ligero de todos.

- ▷ Los **bariones**, que son bosones, tienen tres *quarks* de valencia. Como ejemplo, se citan el propio protón cuya composición es $\{uud\}$ y el neutrón constituido por $\{ddu\}$.

En realidad, teniendo en cuenta los *quarks* y gluones de mar, es más realista considerar una composición de los hadrones como se puede ver en la figura 1.1. Los *quarks* más numerosos son los *quarks* de valencia (en las proporciones adecuadas), pero en el hadrón están presentes más tipos de partículas con carga de color que son los gluones, los *quarks* de tipo *up*, *down*, *strange* y sus *antiquarks*.

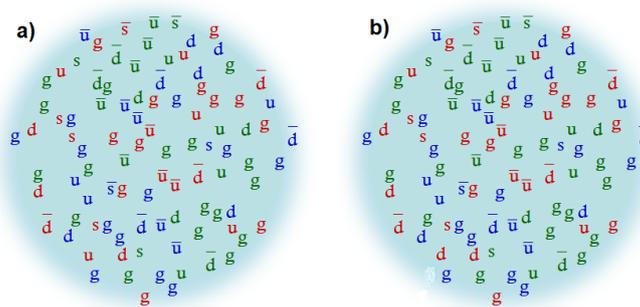


Figura 1.1: Representación de la composición de: a) protón, b) neutrón([27]).

Cuando un gluon o un *quark* es generado, debido al confinamiento cuántico que solo permite estados estables sin carga de color, este autointeracciona radiando otras partículas (que a su vez se recombinan formando hadrones y otras) alrededor de ellos para que la carga de color neta sea nula. Todos los fragmentos tienden a moverse a la vez, colimados en el espacio y en la dirección de emisión del *quark* o gluon inicial, como un «todo». A este «todo» se le denomina **jet de partículas**, que es, en definitiva, un conjunto de hadrones y otras partículas producidas en las hadronizaciones de los *quarks* y/o los gluones tras una interacción (vértice principal de una colisión de altas energías) que se desplazan simultáneamente. En la figura 1.2 se presenta un esquema de la existencia de los *jets* desde que se producen hasta que son absorbidos por el detector.

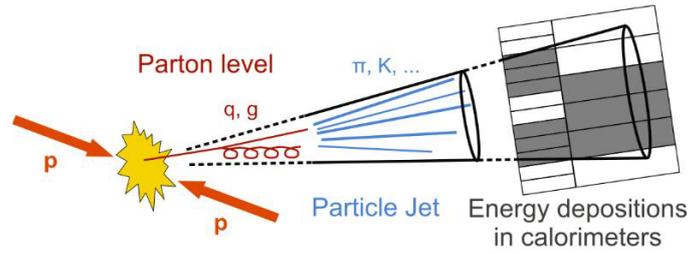


Figura 1.2: Representación de la producción de un *jet* ([19]).

Experimentalmente, se reconoce porque el conjunto de partículas que lo componen deposita energía en varias celdas adyacentes del detector correspondiente en un intervalo muy corto de tiempo. Al conjunto de estas grabaciones simultáneas se le denomina **cluster de energía** y, en el caso de los *jets*, deja un rastro en el detector en forma de cono estrecho. Su estudio es determinante para conocer las propiedades de los *quarks* primitivos. El proceso que permite conocer el sabor del *quark* que ha originado el *jet* se denomina **etiquetado del sabor**.

El *quark bottom* es el más masivo de los que se hadronizan, entonces el hadrón producido, que consecuentemente es el de menor vida media, se desintegra (dando lugar a un vértice secundario) antes de salir del detector y puede observarse experimentalmente; a los *jets* originados por este *quark* se les llama **b-jets**. Esta identificación es especialmente importante en este estudio ya que casi el 96 % de las veces el *quark top* se desintegra por el canal $t \rightarrow Wb$, sin hadronizarse, según [37].

1.3. Tipos de interacciones: fuerte, débil y electromagnética

El SM, a través de los bosones mediadores que se introducen en la subsección 1.1.2, solo explica tres de las cuatro interacciones conocidas. La interacción gravitatoria todavía no se ha conseguido describir de manera análoga al resto de interacciones debido a su propia naturaleza. De hecho, aunque la fuerza gravitatoria es despreciable en la escala de energías estudiadas en física de partículas hasta la fecha («bajas» en comparación con energías del orden de 10^{19} GeV donde se cree que la interacción gravitatoria introduce cambios significativos), cuantizar la gravedad (a través del bosón mediador propuesto: «gravitón») es uno de los mayores retos de la física hoy en día.

1.3.1. Interacción electromagnética

La interacción electromagnética tiene lugar entre partículas con carga eléctrica, es decir, *quarks* y leptones cargados. La fuerza responsable de esta interacción es atractiva cuando las cargas son de signo opuesto y repulsiva cuando son del mismo signo. Es la interacción responsable de dotar de estructura al átomo.

Su comportamiento se explica a través de QED, que es una versión cuántica del electromagnetismo clásico cuya regla de oro es la ley de Coulomb: «la magnitud de cada una de las fuerzas eléctricas con que interactúan dos cargas puntuales en reposo es directamente proporcional al producto de la magnitud de ambas cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. La dirección de la fuerza es la línea que une ambas cargas puntuales.»

El hecho de que la masa del bosón mediador (γ) sea nula hace, por el principio de incertidumbre, que su rango de interacción sea teóricamente infinito. La constante de acoplamiento α_{EM} decrece con la distancia y aumenta con la energía. En regímenes de energía reducidos, tiene el mismo valor que la constante de estructura fina, α (que es prácticamente $1/137$). Se puede ver la variación de esta y el resto de constantes de acoplamiento con la energía en la figura 1.3.

1.3.2. Interacción fuerte

La interacción fuerte tiene lugar entre partículas con carga de color, es decir, *quarks* y gluones. Su comportamiento se explica según QCD y es la responsable de mantener unidos los *quarks* en los hadrones y, residualmente, de la cohesión nuclear.

De nuevo, el bosón mediador (gluon) no tiene masa y teóricamente su rango de interacción es infinito. Sin embargo, experimentalmente se ha observado que tiene rango de interacción menor de 1 fm; hecho que se justifica con la carga de color del propio gluon que hace que interactúe consigo mismo. El hecho de que sea una interacción de corto alcance evita que el universo esté totalmente colapsado.

El valor de la constante de acoplamiento α_S depende fuertemente del régimen de energías en el que se esté, como se puede ver en la figura 1.3. En general, disminuye con la energía de manera que $\lim_{E \rightarrow \infty} \alpha_S = 0$, fenómeno conocido como libertad asintótica y, en rangos de energía más bajos, su valor aumenta con la distancia dando lugar al confinamiento cuántico de los *quarks* y gluones.

1.3.3. Interacción débil

La interacción débil tiene lugar entre partículas con carga débil, es decir, todas; incluidos los neutrinos cuya única forma de interacción es la débil. Es la responsable de las reacciones nucleares de desintegración débil (por ejemplo, la desintegración de un neutrón a un protón por el canal $n \rightarrow p\nu_e e$) y de los fenómenos de dispersión (*scattering*) cuando intervienen neutrinos. Sin embargo, no da lugar a estructuras y su rango de interacción es del orden de 10^{-3} fm (menor que el tamaño nuclear).

La constante de acoplamiento α_W se puede relacionar con la constante electromagnética a través del ángulo de Weinberg: $\alpha_{EM} = \alpha_W \cdot \text{sen}^2(\theta_W)$ siendo su valor experimental $\text{sen}^2(\theta_W) \approx 0.231$ ([37]). Así, la descripción de su comportamiento queda incluido dentro de la teoría QED que unifica ambas interacciones.

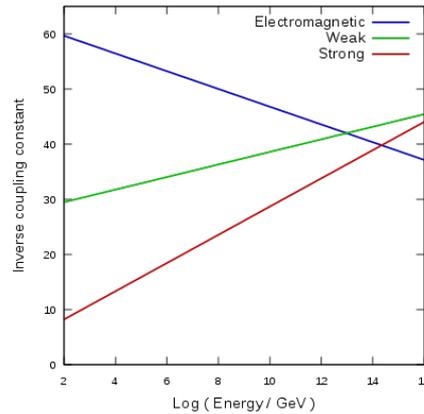


Figura 1.3: Inverso de la intensidad de las constantes de acoplamiento en función de la energía ([52]).

Capítulo 2

Medida de secciones eficaces en física de altas energías

En este capítulo se van a introducir varios conceptos que resultan clave en el desarrollo de este estudio. En líneas generales, a la hora de medir las interacciones que tienen lugar en los aceleradores de partículas, estas se deben parametrizar en función de sus estados iniciales y finales. La matriz S , que se llama **matriz de dispersión** (*scattering matrix*), almacena la información del hamiltoniano de interacción de la QFT a cierto orden perturbativo y formalmente es un operador unitario entre espacios de Hilbert (compuesto por los estados iniciales y finales respectivamente). Los elementos de matriz de S se llaman **amplitudes de dispersión** que son las amplitudes de probabilidad de observar un proceso de dispersión de estado inicial $\langle i|$ y estado final $|f\rangle$, es decir, el valor esperado $S_{if} := \langle i|\hat{S}|f\rangle$.

2.1. Definición de sección eficaz

El concepto de **sección eficaz** hace referencia al área efectiva de una colisión, es decir, es una medida de la interacción entre proyectiles o partículas lanzadas contra un centro dispersor que da una estimación de la probabilidad de que un suceso ocurra. Es una magnitud escalar que se mide en unidades de superficie y se denota por la letra σ .

Estadísticamente, si se lanza un conjunto de partículas (proyectil) sobre una placa plana de superficie A (blanco), sus núcleos son «vistos» como círculos de radio r . Así la probabilidad de impactar contra una de las partículas distribuidas en la lámina es $\sigma = (N\pi r^2)/A$ siendo N el número de núcleos de la superficie A . Esta

deducción es a nivel clásico, a nivel cuántico el cálculo es mucho más complicado y no es competencia de este trabajo.

El radio nuclear típico es del orden de 10^{-12} cm y las secciones eficaces entre núcleos, de 10^{-24} cm². Así surgió una unidad propia llamada barn que se define como $1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$. Dependiendo de qué experimentos se trate, las dimensiones de las secciones eficaces pueden variar enormemente. De hecho, típicamente, en los aceleradores de partículas actuales, se tienen secciones eficaces del orden de los picobarns ($1 \text{ pb} = 10^{-12} \text{ b}$); mucho más pequeñas porque ambos conjuntos de partículas están muy excitados cuando se hacen colisionar en el centro del detector y se «ven» mucho peor que cuando hay un blanco y un proyectil.

Si, en particular, se quiere estudiar la tasa de producción de un proceso en función de uno (o varios) observables físicos, se puede expresar la sección eficaz como una función de este observable (u observables). En este caso, se denomina **sección eficaz diferencial** y se denota por $d\sigma$ en oposición a la **sección eficaz total** cuando se integra en todas las dependencias.

La razón más importante para medir secciones eficaces es que constituyen un nexo entre la medida de sucesos en los detectores y la física teórica (que predice estas secciones eficaces a través de la matriz de dispersión). Es un parámetro altamente dependiente de la energía cuyo valor es difícil de predecir o estimar más allá de donde se tienen datos experimentales. El objetivo de este trabajo es determinar la distribución de las secciones eficaces diferencial de varios observables físicos interesantes tras una colisión p-p (según las condiciones de CMS del LHC en 2016) cuyo estado final tiene cuatro leptones y dos b-jets que satisfacen ciertas condiciones.

2.2. Señal y fondo

A la hora de hacer medidas de las secciones eficaces diferenciales de un observable físico (cualquiera, pero fijo) para un determinado proceso, es conveniente separar adecuadamente los procesos físicos que son objeto de estudio que se denomina **señal** y los que no, que se denominan **fondo**. De lo contrario, se estarían contabilizando sucesos de más para cada intervalo del histograma y los valores de las secciones eficaces serían incorrectos por exceso.

Se deben definir unas características que deben tener las interacciones del tipo del proceso objeto de estudio por el mero hecho de serlo. Por ejemplo, el número de *jets*, el tipo de leptones o la energía faltante del estado final. Al subespacio del espacio de fases que se delimita con estas características impuestas a los sucesos se le llama **región de señal**.

2.3. Física del *quark top*

El *quark top* es la partícula elemental más masiva de todas las conocidas. En consecuencia, tiene varias características que hacen que su estudio sea especialmente interesante y complicado a la vez:

- Por un lado, es la partícula elemental más pesada, por tanto, la que más intensamente interacciona con el bosón de Higgs y la que más información va a dar sobre su masa, $m_H \sim 125$ GeV ([37]).
- Por otro lado, tiene una vida media muy corta (del orden de 10^{-25} s) y una masa muy elevada ($m_t \sim 175$ GeV) ([37]) que prácticamente imposibilitan su hadronización por interacción fuerte como ocurre con el resto de *quarks*. De hecho, el único modo de desintegración del *quark top* es por interacción débil dando lugar a un bosón (W) y a un *quark* (*down*, *strange* o *bottom*); en casi un 96 % de las veces la desintegración es $t \rightarrow Wb$ ([37]).

Debido a su gran masa, se necesitan colisiones de altas energías para producir *quarks top*. Espontáneamente, en las capas externas de la atmósfera, las colisiones de rayos cósmicos con las partículas presentes en el aire producen *quarks top*. Artificialmente, solo en dos aceleradores de partículas se ha conseguido la energía suficiente para producir el *quark top* hasta la fecha que son el Tevatrón¹ y el LHC.

Conceptualmente, los procesos de producción de *quarks top* se clasifican en dos grandes grupos cuyas características se van a detallar a continuación.

¹Acelerador de partículas que forma parte del Fermilab (laboratorio de física de altas energías situado en Chicago). Los *quarks bottom* y *top* y el neutrino del tau fueron descubiertos allí entre 1977 y 2000.

2.3.1. Producción de pares *top-antitop*

Esta es la manera más frecuente de producir el *quark top* tras una colisión p-p. Consiste en una fusión de dos gluones o de un par *quark-antiquark* ($q\bar{q}$) que dan lugar a un gluon con suficiente energía para producir un par $t\bar{t}$ por interacción fuerte.

En la figura 2.1 se muestran los distintos diagramas de Feynman posibles a primer orden en teoría de perturbaciones o **LO** (del inglés, *leading order*) asociados a este proceso. El canal de fusión de gluones es el más común, se produce en un 80-90% de las veces en el orden de energía en centro de masas² en el que se experimenta en el LHC según [37].

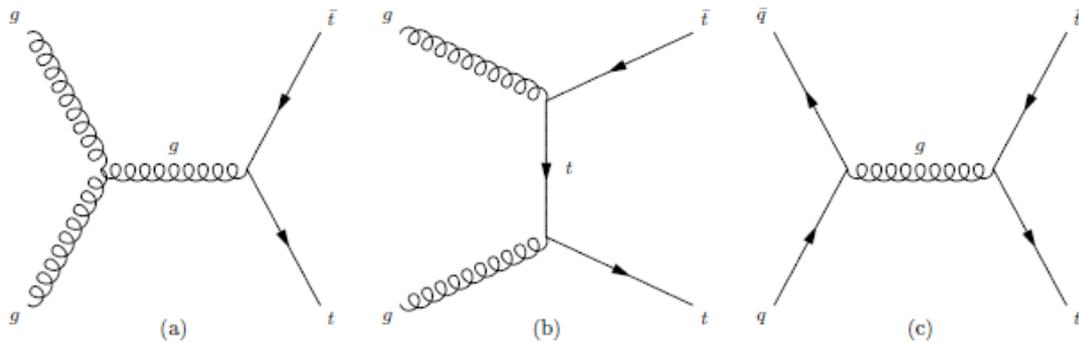


Figura 2.1: Diagramas de Feynman a LO de la producción de pares $t\bar{t}$ para fusión de gluones (a,b) y fusión de *quarks* (c) ([37]).

2.3.2. Producción individual de *quarks top*

Se trata de un proceso de naturaleza diferente al anterior en el que se produce un único *quark top* o *antitop* por interacción débil. Esto ocurre de varios modos diferentes (llamados canales), pero solo se presentan aquí los tres con mayor sección eficaz, es decir, los más probables. En primer lugar, en el «canal-t» un *quark bottom* (que suele venir de un gluon que se desintegra en $b\bar{b}$) se transforma en un *quark top* intercambiando un bosón W con un *quark* (normalmente, *up* o *down*). En segundo lugar, en el «canal-s» un bosón W intermedio (creado de una colisión de tipo $q\bar{q}$)

²El centro de masas de un sistema es el punto geométrico que dinámicamente se comporta como si en él estuviera aplicada la resultante de las fuerzas externas al sistema. Se obtiene con una media ponderada.

se desintegra a una pareja de *quarks* $t\bar{b}$. Por último, en el «canal-tW» se produce un *quark top* y un bosón W a partir de un *quark bottom* suficientemente excitado.

En la figura 2.2 se pueden ver los diagramas de Feynman a LO asociados a los procesos descritos. El más probable de los mencionados es el «canal-t», seguido del «canal-tW»; siendo, por tanto, el «canal-s» el que tiene menor sección eficaz de los tres.

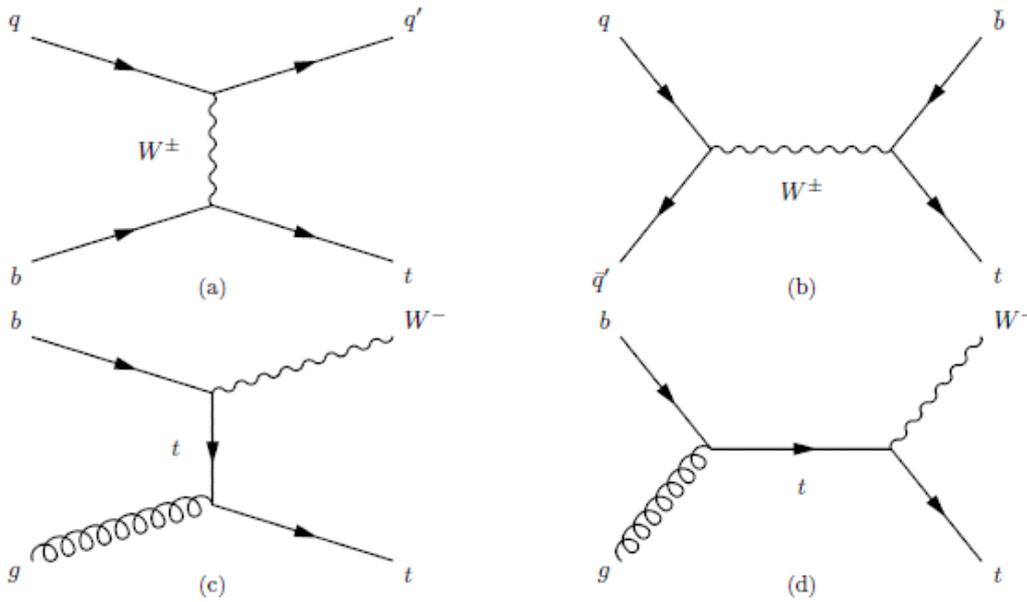


Figura 2.2: Diagramas de Feynman a LO de la producción *single top* en el «canal-t» (a), el «canal-s» (b) y el «canal-tW» (c,d) ([37]).

2.3.3. Secciones eficaces de producción del *quark top*

Durante los últimos años se ha estado investigando sobre la física del *quark top* y ha sido posible estimar las secciones eficaces de los distintos procesos de producción.

Por un lado, se han obtenido valores que predicen las distintas secciones eficaces para ciertos valores de energía; en particular, en este estudio interesan las referentes a $\sqrt{s} = 13$ TeV para LHC. Por otro lado, se han hecho medidas de la producción de pares de *quarks top-antiop* en CMS y de la producción individual de *quarks top* a través de los diferentes canales. Los dos canales más probables se han observado tanto en CMS como en ATLAS; pero el «canal-s» todavía no ha sido observado en LHC, aunque si en el Tevatrón ([12]). Todos los valores de predicciones y medidas

obtenidas hasta la fecha son coherentes entre sí y en las tablas 2.1 y 2.2 se pueden consultar los valores para $\sqrt{s} = 13$ TeV tal y como aparecen en la literatura.

Las incertidumbres de las predicciones se dividen en (esc) que incluyen las dependencias inducidas en las escalas de energía debido a la separación artificial que se introduce entre la dispersión principal y la suave y (PDF³, α_S) que son las debidas a las correcciones cuánticas introducidas en las PDF al extrapolar, a una determinada energía, las medidas experimentalmente de las mismas.

Las incertidumbres experimentales de las medidas se dividen en (est) que son las debidas a las fluctuaciones estadísticas, (sist) que son las debidas a errores sistemáticos, (lumi) que son las debidas a la luminosidad presente en LHC, (teo) que son las debidas a la normalización y (exp) que son las debidas al detector CMS.

Tabla 2.1: Secciones eficaces de la producción de pares de *quarks top-antitop* ([2], [39], [40] y [46]) e individual de *quarks top* por los tres canales más probables ([1], [2], [33], [36], [40] y [43]) predichas a $\sqrt{s} = 13$ TeV.

Proceso		Sección eficaz [pb]
2.3.1	Pares	$\sigma_{t\bar{t}} = 831.76_{-29.2}^{+19.8}$ (esc) ± 35.06 (PDF, α_S)
2.3.2	«canal-t»	$\sigma_{t-ch} = 217.0_{-4.6}^{+6.6}$ (esc) ± 6.2 (PDF, α_S)
	«canal-tW»	$\sigma_{tW-ch} = 71.7 \pm 1.8$ (esc) ± 3.4 (PDF, α_S)
	«canal-s»	$\sigma_{s-ch} = 10.32_{-0.24}^{+0.29}$ (esc) ± 0.27 (PDF, α_S)

Tabla 2.2: Secciones eficaces de la producción de pares de *quarks top-antitop* ([16]) e individual de *quarks top* por el «canal-t» ([14]) y por el «canal-tW» ([15]) medidas en CMS a $\sqrt{s} = 13$ TeV.

Proceso		Sección eficaz [pb]
2.3.1	Pares	$\sigma_{t\bar{t}} = 815 \pm 9$ (est) ± 38 (sist) ± 19 (lumi)
2.3.2	«canal-t»	$\sigma_{t-ch} = 232 \pm 13$ (est) ± 12 (exp) ± 26 (teo) ± 6 (lumi)
	«canal-tW»	$\sigma_{tW-ch} = 63.1 \pm 8.1$ (est) ± 6.4 (sist) ± 2.1 (lumi)

³Del inglés, *parton distributions function*; se define la densidad de probabilidad para encontrar un determinado partón con una determinada fracción de momento longitudinal para una energía fija.

2.3.4. Proceso tW y $t\bar{t}$

Se recuerda que el objetivo de este trabajo es medir la sección eficaz diferencial del proceso que tiene como estado final dos b -jets y 4 leptones (concretamente, dos neutrinos y dos leptones de los canales ee , $e\mu$, $\mu\mu$) que cumplan ciertas condiciones adicionales.

Los diagramas de Feynman que se muestran en las figuras 2.1 y 2.2 son perfectamente distinguibles para el proceso de producción de pares $t\bar{t}$ y el de producción individual de *quarks top* por el «canal- tW » (en cualquiera de sus variantes) a partir de sus estados finales. Sin embargo, si se consideran los diagramas de Feynman de estos procesos a segundo orden en teoría de perturbaciones o **NLO** (del inglés, *next to leading order*) que se representan en la figura 2.3 se puede apreciar que los estados finales de ambos procesos son idénticos y, a este nivel, ya no se pueden aplicar exactamente las definiciones de los procesos tW y $t\bar{t}$ anteriores.

De hecho, se recuerda que la detección del *quark top* no es posible como tal, sino que se miden los productos en los que se desintegra rápidamente tras su producción. Estos, en casi un 96 % de las veces ([37]) son un *quark bottom* (de vida media significativamente más larga, del orden de 10^{-12} s ([37])) y un bosón W . Este bosón W tampoco se mide directamente, sino que se detectan los productos en los que se desintegra. Solo se tendrán en cuenta los canales leptónicos (e o μ que son estable y de vida media del orden de 10^{-6} (detectable) respectivamente y un neutrino de la misma generación (estable, pero no detectable) ([37]). La razón por la que no se consideran los canales hadrónicos, más de un 65 % de del total ([37]), es porque los canales leptónicos se observan mejor, introducen menos incertidumbres sistemáticas y se tiene estadística suficiente solo con ellos. Cabe destacar que el canal τ no está totalmente excluido ya que se desintegra por $\tau \rightarrow e\nu_e\nu_\tau$, $\tau \rightarrow \mu\nu_\mu\nu_\tau$ en un 17 %, 18 % de veces respectivamente ([37]).

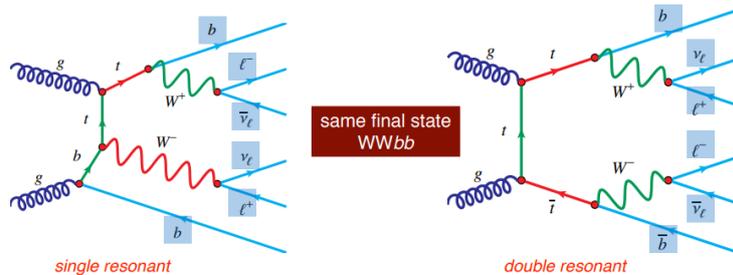


Figura 2.3: Diagramas de Feynman a NLO de los procesos de producción de pares $t\bar{t}$ e individual de *quarks top* en el «canal- tW » ([44]).

Si se calcularan las amplitudes de dispersión asociadas a sus diagramas de Feynman a NLO se tendrían interferencias entre ellas y el problema principal es que algunos estados finales de ambos procesos son indistinguibles a este orden. Además, otra desventaja del estudio de estos procesos es que, como se ve en los valores de las secciones eficaces de las tablas 2.1 y 2.2, la producción de pares es mucho más probable que el «canal- tW ».

Actualmente en el campo se trata la corrección a NLO de la amplitud de dispersión a LO del proceso tW (menos probable):

$$|A_{tW}|^2 = |A_{t\bar{t}}|^2 + |A_{tWb}|^2 + 2 \operatorname{Re}\{A_{t\bar{t}}^* \cdot A_{tWb}\}$$

Estos son los modelos, de entre los existentes, considerados en el análisis de este trabajo para tratar esta interferencia a NLO:

- ▷ **DR** que elimina toda contribución del proceso $t\bar{t}$, es decir, $|A_{tW}|_{DR}^2 = |A_{tWb}|^2$.
- ▷ **DS** que cancela la contribución de la resonancia $t\bar{t}$ con un término de sustracción local que incluye la interferencia, es decir, $|A_{tW}|_{DS}^2 = |A_{tWb} + A_{t\bar{t}}|^2 - C_{2t}$.

Alternativamente, también se pueden simular a NLO el estado final al completo (cuatro leptones y dos b -jets que cumplan ciertas condiciones) sin considerar que pueda haber sucesos diferentes. Esta simulación no se incluirá en los resultados de este trabajo porque todavía está desarrollándose.

Capítulo 3

Dispositivo experimental

En física de partículas, se suele trabajar experimentalmente con **aceleradores de partículas**. Como su propio nombre indica, son dispositivos que estudian colisiones entre partículas cargadas, previamente aceleradas a altas velocidades a través de campos electromagnéticos. Existen dos tipos básicos de aceleradores de partículas: los lineales y los circulares.

Las colisiones que tienen lugar en los aceleradores se analizan gracias a unos aparatos gigantescos llamados detectores que presentan un entorno adecuado para el estudio de las partículas generadas en las colisiones y que se desintegraron al poco tiempo de esta ya que muchas no son estables y su vida media es muy corta. A partir de la información del detector sobre las partículas finales se debe reconstruir tanto como sea posible el proceso que ha tenido lugar desde la colisión.

3.1. Acelerador LHC

En particular, el acelerador del que se van a analizar datos en este trabajo es el gran colisionador de hadrones (o **LHC**, del inglés *Large Hadron Collider*) es el mayor acelerador de partículas circular del mundo. Consiste en un túnel de 27 km de circunferencia que pertenece al CERN y está situado, de media, a 100 m de profundidad ocupando territorios de Francia y Suiza. Fue inaugurado en 2008, 10 años después del comienzo de su construcción.

En el LHC son acelerados dos haces de partículas (generalmente protones) a velocidades próximas a la de la luz. Son guiados por tubos separados y en sentidos opuestos mediante campos magnéticos generados por electroimanes superconductores a temperaturas por debajo de los 2 K. Inicialmente, la energía en centro de masas

con la que funcionaba era de 7 TeV; actualmente, esta energía ha aumentado hasta 13 TeV (mayor energía alcanzada en un acelerador hasta la fecha¹) y está diseñado para alcanzar los 14 TeV.

Una vez que se han acelerado las partículas suficientemente, se deja que ambos colisionen frontalmente en los puntos en los que están situados los cuatro detectores principales del LHC:

- ▷ **ALICE** (del inglés, *A Large Ion Collider Experiment*) está especializado en medidas de los plasmas *quark-gluon* que se crean al romperse núcleos pesados.
- ▷ **LHCb** (del inglés, *LHC beauty*) es otro detector especializado en detectar hadrones formados por *quarks bottom*.
- ▷ **ATLAS** (del inglés, *A Toroidal LHC Apparatus*) es un detector de propósito general.
- ▷ **CMS** (del inglés, *Compact Muon Solenoid*) es otro detector de propósito general, pero con un diseño muy diferente que permite contrastar sus resultados con los de ATLAS.

El detector del que se van a utilizar los datos en este trabajo es CMS. Por ello, se estudiarán más en profundidad sus peculiaridades en la sección 3.2.

3.1.1. Luminosidad

Se define un **haz de partículas** como una corriente (en este caso de partículas) que se mueven en una sola dirección sin dispersión. En los experimentos típicos de física de altas energías que tienen lugar en los aceleradores de partículas actuales, se suelen enfrentar² dos haces suficientemente acelerados que se hacen colisionar en un punto previamente escogido en el que se sitúa el centro de un dispositivo llamado detector. Por eso, aunque se habla de colisión p-p, en singular, en realidad tienen lugar muchas más de una a la vez.

Una de las variables fundamentales de los aceleradores de partículas es la luminosidad; en este contexto, se definen dos luminosidades diferentes.

- ▷ La **luminosidad instantánea**, \mathcal{L} , es el número de colisiones por unidad de superficie y por unidad de tiempo que tienen lugar entre dos haces. Se mide, por lo tanto, en unidades inversas de superficie por unidad de tiempo (1/pb·s).

¹Cada haz de protones es acelerado hasta tener una energía de 6.5 GeV.

²Son lanzados en la misma dirección y sentido contrario.

- ▷ La integral de la luminosidad instantánea en el tiempo se denomina **luminosidad integrada**, L . Se mide en unidades inversas de área y, en analogía a la sección eficaz, se utiliza el barn inverso. En CMS, se suele trabajar con luminosidades del orden del femtobarn ($1 \text{ fb}^{-1} = 10^{-15} \text{ b}^{-1} = 10^{-39} \text{ cm}^{-2}$). Por ejemplo, si un detector acumula una luminosidad integrada de 10 fb^{-1} , se esperan detectar 10 sucesos por femtobarn de sección eficaz.

Por lo tanto, cuanto mayor sea la luminosidad, mayor es la probabilidad de que se produzcan colisiones relevantes, es decir, interesa trabajar con luminosidades altas.

Dado un proceso con sección eficaz total σ y una luminosidad integrada L conocidas, se calcula el número de veces que se va a producir dicho proceso con la expresión $N = L \times \sigma$.

A finales de 2016, en el LHC se alcanzó una luminosidad integrada de más de 40 fb^{-1} en las colisiones p-p a $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$, pero en CMS se detecta un poco menos por limitaciones computacionales. En la figura 3.1 se puede ver una gráfica sobre los datos tomados:

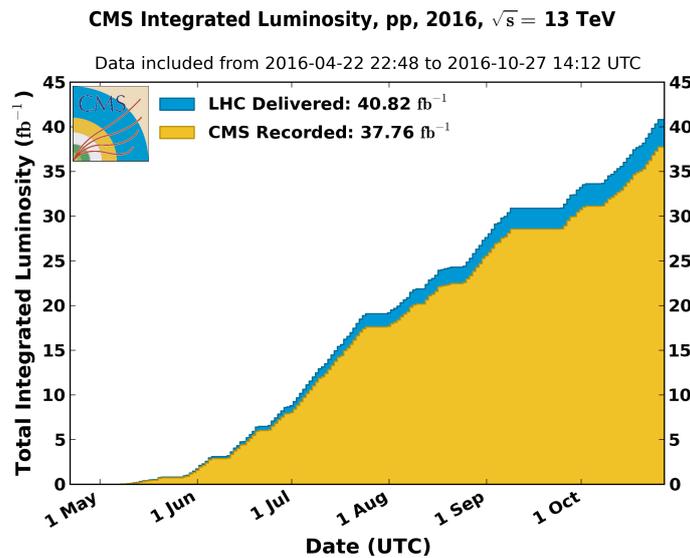


Figura 3.1: Luminosidad integrada total del LHC y medida en CMS en 2016 ([21]).

3.2. Detector CMS

Está diseñado para analizar un amplio abanico de procesos resultantes tras colisiones de altas energías.

- Estudiar el SM en el rango de los TeV.
- Investigar aspectos de colisiones p-p o de iones pesados.
- Uno de los objetivos principales tanto de este detector como de otros, era descubrir experimentalmente el bosón de Higgs (cuya existencia ya se había predicho).
- Estudiar la física más allá del SM; como por ejemplo, teorías supersimétricas, la búsqueda de dimensiones espaciales extra o el estudio de las posibles partículas constituyentes de la materia oscura.

La Colaboración CMS es una de las colaboraciones científicas internacionales más grandes de la historia en la que participan más de 5600 profesionales procedentes de 42 países diferentes.

El detector CMS fue diseñado unos años antes de que el LHC comenzara a operar en el CERN. Así se pudo desarrollar un algoritmo eficiente para la reconstrucción sistemática de sucesos de flujos de partículas.

3.2.1. Composición interna

En esta subsección, se presenta una descripción general de los sistemas de detección de CMS que se puede ampliar en [13] de donde se ha sacado la información. Las dimensiones de CMS son 14.6 m de diámetro y 28.7 m de largo; tiene un peso de 12500 toneladas y está situado en una caverna subterránea cercana a Cessy, en Francia. Está constituido por 15 capas diferentes que conjuntamente consiguen cubrir la detección de casi todos los tipos de partículas a identificar.

Geoméricamente, los detectores modernos en colisionadores de altas energías son cilindros anidados en capas alrededor del eje del haz. Las partículas que interactúan en ellos tienen energías tan altas, que recorren largas distancias antes de ser absorbidas (las que lo son), por eso se necesitan dispositivos experimentales inmensos que permitan observar los procesos. Embebido en el interior del detector existe un **solenoides superconductor** que genera un campo magnético de 3.8 T que permite curvar las trayectorias de las partículas cargadas, de manera que estas siguen una trayectoria helicoidal. Gracias a esta curvatura, es posible detectar los muones antes de que escapen del detector ya que aumenta el tiempo durante el cual la trayectoria se mantienen dentro de él.

El proceso comienza en la región de interacción del haz donde se produce la colisión y las partículas, productos de esta, van recorriendo las diferentes capas del detector en el siguiente orden:

1. **Detector de trazas**

Se denomina **traza** a la trayectoria de una partícula cargada. El detector de trazas permite medir la carga eléctrica y el momento de cada partícula cargada, conocido el radio de la hélice descrita por dichas partículas.

2. **Calorímetro electromagnético (ECAL)**

El grupo de calorímetros electromagnéticos «de grano fino» absorbe los electrones y los fotones. También detecta los *jets* electromagnéticos como *clusters* de energía y de estas grabaciones determina la energía y la dirección de las partículas.

3. **Calorímetro hadrónico (HCAL)**

El grupo de calorímetros de hadrones hermético de «grano grueso» absorbe los hadrones (neutros y con carga), aunque puede que dejen algo de rastro hadrónico en el ECAL. Los *clusters* correspondientes son utilizados para determinar la energía y la dirección de los hadrones.

4. **Sistema de muones**

Los muones y los neutrinos, que atraviesan los calorímetros sin apenas interacción, llegan a las cámaras de muones donde los muones suelen producir impactos y los neutrinos escapan sin ser detectados.

La figura 3.2 ayuda a entender mejor el detector CMS ya que muestra esquemáticamente lo que ocurre tras la colisión.

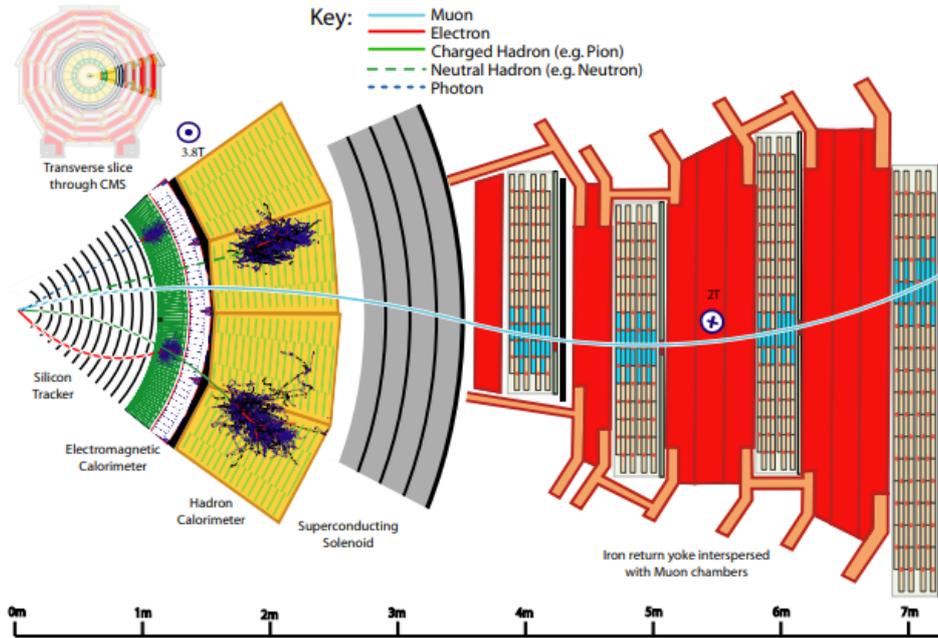


Figura 3.2: Sección de CMS en la que se representan las trayectorias de las partículas detectables ([42]).

3.2.2. Sistema de referencia

El convenio usual que fija la orientación de los ejes de coordenadas de CMS es:

- Origen o centro de coordenadas: punto interior en el que se produce la colisión.
- Eje X: apunta horizontalmente al centro del LHC, es decir, al centro del anillo.
- Eje Y: apunta verticalmente hacia arriba.
- Eje Z: va en la dirección en la que se produjo la colisión y apunta al oeste.

En el contexto de la física de partículas, se suelen utilizar las coordenadas cartesianas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o las cilíndricas para los vértices (posición) ya que es un objeto estático. Sin embargo, la descripción de las partículas, que siempre emergen hacia fuera, se suele expresar de manera diferente; con este objetivo se definen los siguientes observables físicos.

- ▷ El **ángulo azimutal**, ϕ , se define en el plano XY desde el eje X. Se suele expresar en radianes y varía en $[-\pi, \pi)$. La coordenada radial en este plano se denota por r .

- ▷ El **ángulo polar**, θ , es una medida de la desviación de la partícula. Se mueve en el plano (Z,r) comenzando en el eje Z , así los valores posibles son $[-\pi/2, \pi/2]$. No obstante, esta desviación suele expresarse con la **pseudorapidez** que se define como $\eta = \ln \tan(\theta/2)$ siendo $\eta = 0$ el plano XY y $\eta = \pm\infty$ el eje Z .
- ▷ La **rapidez** viene dada por $y = \frac{1}{2} \ln \frac{E+p_z}{E-p_z}$. Es invariante bajo transformaciones de Lorentz en el eje Z . Además, siempre que $m \ll p$ (limite aceptable en los experimentos de física de altas energías) entonces $\eta \simeq Y$.

Así, (η, ϕ) caracteriza totalmente la partícula ya que dan una idea de su transversalidad. La figura 3.3 ayuda a entender mejor la geometría de las coordenadas definidas en CMS.

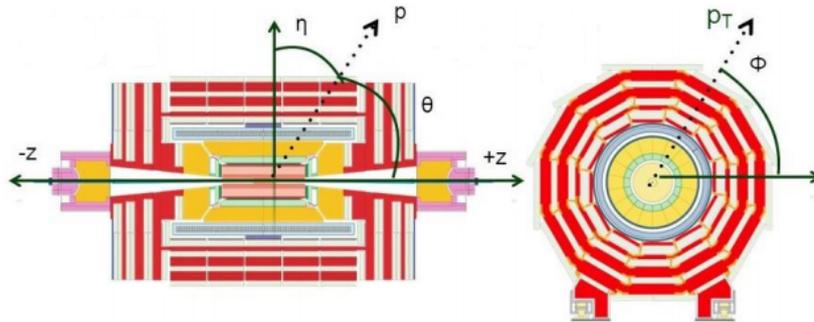


Figura 3.3: Sistema de coordenadas utilizado en CMS ([26]).

3.2.3. Observables físicos notables

Una vez que se tienen las coordenadas y el sistema bien identificados, se definen varias magnitudes que suelen ser de utilidad para resumir las características de las colisiones:

- ▷ El **momento** de una partícula, \vec{p} , se define como el producto de su masa relativista³ por su velocidad, de modo que $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$. Esta magnitud se puede expresar en coordenadas cartesianas (p_x, p_y, p_z) , en coordenadas esféricas centradas en el punto de la colisión $(|p|, \theta, \phi)$ y en función de su momento transversal que se definirá a continuación.
- ▷ El **momento transversal**, \vec{p}_T , es la componente transversal del momento de la partícula respecto al eje de la colisión, es decir,

³La masa relativista de una partícula se define como $m := \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ siendo m_0 la masa invariante de la partícula y v su velocidad.

$$\vec{p}_T := \vec{p}_x + \vec{p}_y$$

En física de partículas se suele trabajar con su módulo $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$. El momento de una partícula también queda definido por (p_T, η, ϕ) que son las magnitudes que se miden en CMS. La relación de estas últimas con las coordenadas anteriores es:

$$p_x = p_T \cos \phi \quad p_y = p_T \sin \phi \quad p_z = p_T \sinh \eta \quad |p| = p_T \cosh \eta$$

- ▷ La **energía transversa** es la energía depositada en los calorímetros y se define como $E_T := E \cdot \sin(\theta)$.
- ▷ La energía transversa faltante o **MET**, E_T^{miss} , es la suma de las energías de las partículas no detectables⁴. Según los principios de conservación, la componente transversa del momento total es nula inicialmente (ya que chocan en la dirección del eje Z) y durante toda la colisión; por lo tanto, la MET es el opuesto del módulo de la suma vectorial de todos los momentos transversos detectados, es decir⁵,

$$E_T^{miss} = \left| - \sum \vec{p}_T \right|$$

- ▷ El **cuadrimomento** de una partícula es un cuadvivector que combina el momento lineal y la energía de una partícula. Se define en coordenadas galileanas como la masa relativista³ de la partícula por la cuadvivelocity de la misma:

$$P = m \cdot U = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \left(\frac{E}{c}, p_T, \eta, \phi \right)$$

En definitiva, una buena caracterización de una partícula serán su pseudorapidez y su momento/energía, además de la identificación de la propia partícula (que determina su m entre otros). El valor de ϕ es un poco menos relevante dada la simetría cilíndrica del dispositivo. Por otro lado, será imprescindible tener un buen aislamiento que facilite el análisis.

3.2.4. Disparador y apilamiento

Se denomina **colisión principal** (*hard collision*) a la colisión inelástica p-p que, de entre las que se produjeron, tiene mayor suma de momento transverso (del orden

⁴La energía de una partícula que se mueve en el plano transverso es $E = \sqrt{m^2 + p_T^2}$, pero se puede suponer que las masas de las partículas no detectables son despreciables que es una buena aproximación muchas veces y $E_T^{miss} \approx |\vec{p}_T^{miss}|$.

⁵Esta definición, es un abuso de notación, ya que lo correcto sería hablar de **momento transverso faltante**.

de varios GeV). El **vértice primario** es el punto en el que ambos protones de la colisión principal colisionaron; la reconstrucción de las trayectorias hasta el eje del detector es posible gracias a la alta resolución de los detectores de trazas (parte del detector CMS como se verá en la subsección 3.2.1). Se selecciona la interacción más interesante entre los subcomponentes de los protones de la colisión principal y se escoge una energía de corte; así esta interacción comienza con la **dispersión principal** (*hard scattering*) que va desde el momento de la colisión hasta que la energía disminuye hasta la energía de corte y la **dispersión suave** (*soft scattering*) a partir de entonces. Se denomina ***underlying event*** al conjunto de interacciones que tuvieron lugar entre los componentes de los protones de la colisión principal que no fueron seleccionadas.

Para dar una idea cualitativa de la situación, se realizan del orden de 40 millones de colisiones por segundo (número de veces que se cruzan los haces por segundo), dicho de otro modo, la frecuencia es del orden de 40 MHz y solo se tiene capacidad para almacenar datos de colisiones con una frecuencia de 100 Hz; por tanto, no es posible almacenar toda la información y debe hacerse una selección de la misma. Se denomina **disparador** (*trigger*) al conjunto de procedimientos y herramientas del detector tanto de *hardware* como de *software* que se encargan de llevar a cabo la selección. A grandes rasgos, en el disparador se definen los ***trigger paths*** que son conjuntos de requisitos que deben cumplir los sucesos para ser guardados.

Sin embargo, no es posible tener la precisión suficiente en el disparador para separar la información de la colisión principal y aislarla del resto de colisiones (que tuvieron menor momento transversal; entre otros protones de los paquetes). Inevitablemente, se va a etiquetar información que en realidad venga de otras colisiones que ocurrieron a la vez. A este efecto de «contaminación», que se debe tener en cuenta, se le llama **apilamiento** (*pile-up*) y sigue una distribución de Poisson. Se determinarán los objetos que pertenecen a la colisión principal según criterios de proximidad.

En CMS, se dispone de un *trigger* dispuesto en niveles: el primer nivel está basado en el *hardware*, que hace una preselección de sucesos y los niveles sucesivos están basados en el *hardware* convencional, que permiten clasificar los sucesos en los diferentes *trigger paths* en función de sus características, es decir, en función del tipo de colisión principal que tuvo lugar. Esta clasificación es indispensable para el post-análisis de los datos.

Respecto al apilamiento, se puede apreciar en la figura 3.4 que el número medio de interacciones por cruce sigue una distribución gaussiana que, en los datos de 2016, tiene una media de 27 colisiones de apilamiento.

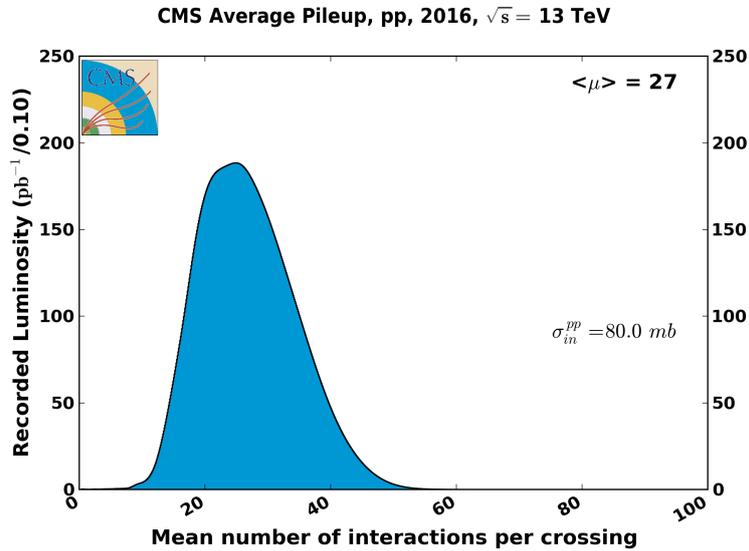


Figura 3.4: Distribución del apilamiento producido en las colisiones detectadas en CMS en 2016 ([21]).

3.3. Reconstrucción de partículas: *Particle Flow*

Una vez tomados los datos, es preciso identificar cada partícula producida en el estado final de la colisión y obtener su momento/energía. Como se mencionó al comienzo de esta sección, se ha desarrollado y sintonizado un potente algoritmo de reconstrucción de partículas para el detector CMS llamado **PF** (del inglés, *Particle Flow*). En él, se combina toda la información recogida a lo largo de las capas del detector.

Una mejora significativa de la descripción de sucesos ha sido lograr correlacionar los elementos básicos de todas las capas del detector a la hora de identificar el estado final de cada partícula. A partir de esta identificación, también ha sido posible combinar las diferentes medidas que reconstruyen las propiedades de las partículas.

Se procede a introducir los distintos objetos físicos que se detectan y como funciona a grandes rasgos el algoritmo para cada uno de ellos (en orden ascendente de dificultad de identificación) en base a lo publicado en [3], [18] y [25].

1. **Reconstrucción de muones:** Son las partículas más fácilmente identificables, dejan rastro en el detector de trazas y en el detector de muones y pasan por el ECAL y el HCAL sin apenas interaccionar.

Trayectoria:

Paso I. Se reconstruyen las trayectorias de ambos detectores.

Paso II. Se extienden la trayectoria del detector de muones a las zonas sin rastros y se comprueba si son compatibles con lo detectado en el detector de trazas teniendo en cuenta las características del recorrido. Esta compatibilidad se cuantifica por criterios de proximidad según la siguiente distancia:

$$d = \sqrt{\Delta(\phi)^2 + \Delta(\eta)^2}$$

Paso III. Se vuelve a calcular la trayectoria faltante con más precisión ya que ahora se utilizan los datos de ambos detectores.

Momento longitudinal y energía: se obtienen a partir del momento transverso, el campo magnético y la trayectoria (todos conocidos).

Clasificación de muones: conviene separar los muones según como fueron generados, es decir, aislados o junto con *jets*. Con este objetivo:

- primero, se fija un cono imaginario en torno al muon en términos de distancias, es decir, toda partícula que diste menos de una distancia $\Delta(R_0)$ está asociado al muon;
- a continuación, para cuantificar las características de lo que rodea el muon, se define la magnitud **aislamiento**, I , como la suma de los momentos transversos de los objetos del cono.

$$I = \sum_{\Delta(R(i)) < \Delta(R_0)} |\vec{p}_T(i)|$$

Así, los muones con poco I serán aislados y se pueden identificar los muones que provienen de W y Z descartando otro tipo de procesos que no interesan en este estudio.

Limpieza: se obtienen las aportaciones de los muones al detector de trazas y se eliminan para que no manchen el análisis posterior.

2. **Reconstrucción de electrones:** Estas partículas dejan rastro en el detector de trazas y son absorbidas por el ECAL, su reconstrucción será mas compleja y tendrá más incertidumbre.

Interferencias: los fotones emitidos por la radiación de frenado *Bremsstrahlung* también dejan rastro en el ECAL y no debe confundirse con los producidos en la colisión o como subproducto de esta.

Trayectoria: la reconstrucción es análoga a la de los muones, utilizando la información del ECAL (en vez de la del HCAL) con criterios de proximidad. Como particularidad, habrá *clusters* no asociados a ninguna traza porque provienen de fotones.

Momento longitudinal y energía: se obtienen a partir del momento transversal, el campo magnético y la trayectoria (todos conocidos).

Clasificación de electrones: en este sentido, se utilizan los mismos criterios de aislamiento.

3. Reconstrucción de *jets* de partículas:

Trayectoria: se parte de las trazas del detector de trazas que aún no fueron identificadas y se extrapolan hasta los calorímetros para ver si son compatibles con algún *cluster*. Se recuerda que los *jets* dejan una sección cónica en torno al vértice principal.

Momento transversal: se estima para los candidatos a hadrones y se resta del valor real depositado en los calorímetros. Si la diferencia es significativa, será necesario suponer que se han producido fotones (exceso en el ECAL) o hadrones neutros (exceso en el HCAL).

Energía: la energía de los *jets* se mide desde los calorímetros sin falta de separar sus partículas elementales o acceder a la información del detector de trazas o del detector de muones ya que es la suma de la energía de todas las partículas. La energía del *quark* o gluon inicial no es sencilla de calcular y se hace con algoritmos basados en simulaciones.

Etiquetado de *jets*: se hace a partir del algoritmo **CSVv2** (del inglés, *Combined Secondary Vertex*) que combina criterios de distancia, energía y multiplicidad de la carga y se basa mayoritariamente en la información del detector de trazas. Existen tres criterios *loose*, *medium* y *tight* que identifican los *b-jets* con pureza creciente.

4. Reconstrucción del resto de partículas:

Los leptones de tipo tau, tienen una vida media del orden de 10^{-13} s ([37]) que es demasiado corta para poder identificarlos directamente en los detectores actuales. Según [37], las desintegraciones más probables son:

- ▷ a leptón e ($\tau \rightarrow e \nu_e \nu_\tau$) en un 18%,
- ▷ a leptón μ ($\tau \rightarrow \mu \nu_\mu \nu_\tau$) en un 17% y
- ▷ a hadronizarse en un 49% de las veces.

Los neutrinos, pasan por todas las capas del detector sin apenas interactuar. Para inferir su presencia, se establecen unos límites por encima de los cuales la MET es debida a partículas «invisibles» (neutrinos u otros) y no a efectos del detector.

En la figura 3.5 se puede observar la identificación de tres *jets* y otros tipos de partículas que resuelve el algoritmo PF.

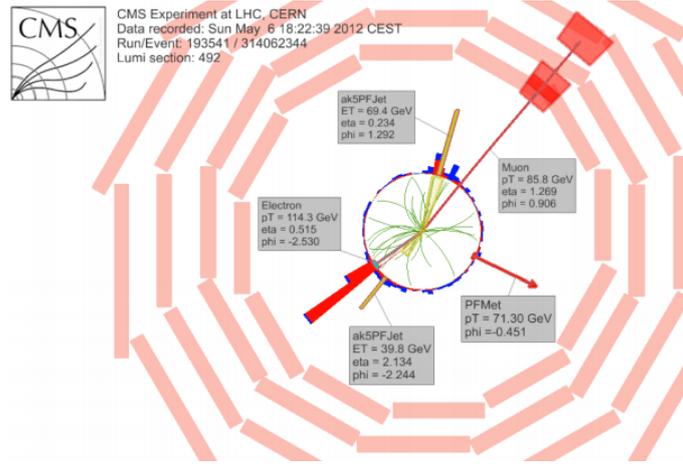


Figura 3.5: Deposiciones de energía de distintas partículas en CMS ([20]).

3.4. Simulaciones de Montecarlo de sucesos

Debido al gran parecido entre estados finales de sucesos en el SM, es conveniente recurrir a simulaciones a la hora de contrastar los experimentos y la teoría. Las simulaciones pretenden ser una reproducción lo más exacta posible de la generación de las partículas en la colisión, la interacción de estas con el detector y la simulación del proceso de reconstrucción.

El método de **simulaciones de Montecarlo** es un método no determinista utilizado para aproximar expresiones matemáticas complejas o costosas de evaluar con exactitud, es aplicable a cualquier tipo de problema y, en virtud del teorema del límite central⁶, tiene un error absoluto de la estimación que decrece como $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

⁶Sean X_1, X_2, \dots, X_N un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2 finita. Si $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_N - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \leq z\right) = \Phi(z)$$

En una colisión p-p, en realidad, no se produce una sola colisión entre dos partículas, sino que es una situación mucho más compleja cuyo esquema se puede ver en la figura 3.6 donde se representa:

- Azul: componentes de los protones autointeraccionando previamente a la interacción.
- Rojo oscuro y rojo: dispersiones principal y suave.
- Morado: *underlying event*.
- Verde claro: hadronizaciones (vértices secundarios de los *jets*).
- Verde oscuro: desintegración de los hadrones.
- Amarillo: radiación de fotones.

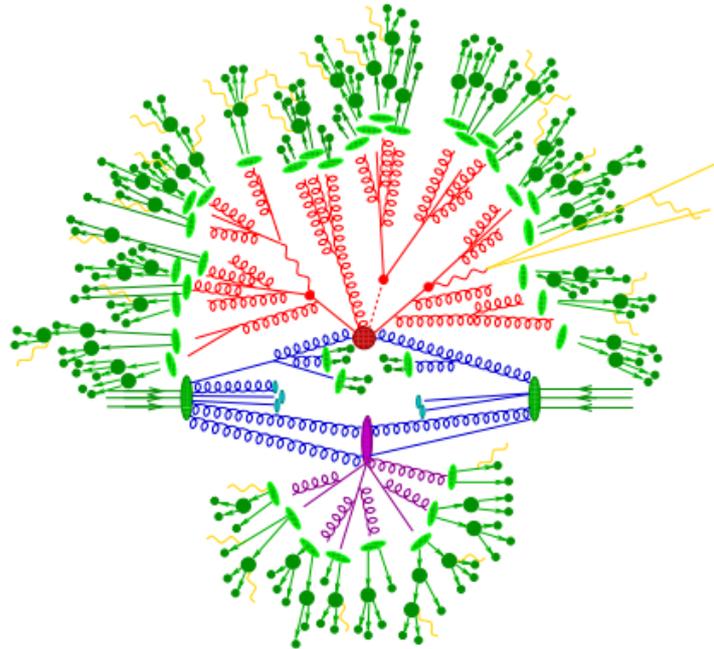


Figura 3.6: Esquema de las partes de una colisión principal p-p que deben ser simuladas ([47]).

En orden cronológico, las etapas de simulación son las siguientes:

1. Dispersión principal: se muestrea la región de señal de la colisión entre los **partones**, que son los *quarks* y gluones constituyentes de los protones, a partir de las p.d.f. de los partones y se generan aleatoriamente los residuos de la colisión, es decir, el momento de la partícula saliente. Algunos de los *softwares* disponibles son **aMC@NLO** o **Powheg** descritos en [34] y [45] respectivamente.

2. Región radiactiva: tras la colisión, las partículas son altamente energéticas y se simula la emisión de bosones (gluones y fotones principalmente). A su vez, los gluones y los *quarks* dan lugar a más partículas con carga de color y este fenómeno es conocido como **cascada de partones** o **PS** (del inglés, *parton shower*).
3. Hadronización y desintegración de los hadrones: las partículas con carga de color se hadronizan y posteriormente se desintegran (todo ocurre rápidamente y dentro del detector)
4. Remanente de la colisión: solo es posible simular una aproximación del apilamiento presente por estimaciones en teoría de perturbaciones a cualquier orden y para ello se utiliza **Pythia8**.
5. Respuesta del detector: se simula el paso de las partículas por cada subdetector usando modelos precisos para cada tipo; se obtienen unos y ceros que son equivalentes a los resultados obtenidos en los datos experimentales. Se utiliza **Geant4** que puede hacer dos aproximaciones diferentes:
 - ▷ *full-sim* de alto coste computacional, reproduce la estructura completa y
 - ▷ *fast-sim* más veloz y menos exacta que la anterior, modelos simplificados.

En este trabajo se va a utilizar en todo caso *full-sim*.

Capítulo 4

Unfolding

El *unfolding*¹ es un método que pretende corregir, a partir de los datos experimentales y de la información conocida sobre las limitaciones de los dispositivos, las imprecisiones que las medidas introducen en las estimaciones de las distribuciones de los observables físicos. Es decir, el objetivo es obtener la distribución que se mediría en un dispositivo experimental ideal.

En este trabajo se introduce el método orientado a la física de partículas, pero los conceptos han sido desarrollados para poder aplicarlos a otros campos como la reconstrucción óptica de imágenes, la astronomía de radio, la cristalografía o las imágenes médicas.

Gracias al método de *unfolding*, es posible realizar las siguientes tareas analíticas post-experimentales:

- Comparar las medidas con los modelos teóricos.
- Comparar los experimentos con las distintas respuestas.
- Introducirlo a análisis posteriores.
- Análisis de datos exploratorio.

4.1. Motivación física

Desafortunadamente, determinar la sección eficaz de un proceso no es siempre algo trivial. Puede ocurrir que esta sea muy pequeña o que se detecte más fondo que señal. En este contexto, es imprescindible lograr mejoras que separen la señal

¹La traducción del nombre al castellano suele ser «deconvolución», aunque su uso no está extendido para el nombre del método.

del fondo. Una vez que se ha extraído la señal, el siguiente paso es determinar la verdadera distribución de los sucesos en el histograma a partir de las detecciones.

Se deben hacer estimaciones sobre las siguientes limitaciones en las medidas:

- Existe la posibilidad de que haya partículas que pasen sin ser vistas por el detector, efecto que influye en la cantidad total de señal detectada.
- Puede ocurrir que un suceso se guarde con un valor del observable físico en estudio diferente al valor que en verdad tenía la partícula. Este fenómeno, afecta sobretodo a las medidas de las secciones eficaces diferenciales que es el objeto de estudio de este trabajo.
- En física experimental, se suele trabajar con magnitudes cuyos valores se pueden medir sin incertidumbre. Sin embargo, los valores de ciertos observables físicos sufren fluctuaciones aleatorias debidas a limitaciones experimentales que deforman las distribuciones detectadas para dichos observables.

La metodología y la nomenclatura que se introducen en este texto se basan fielmente en el libro [30]. De hecho, por homogeneidad con este, se mantiene la notación en inglés en las fórmulas y en los nombres de las variables:

- ▷ *bin* hace referencia a los intervalos.
- ▷ *true* se refiere a la distribución verdadera o real del observable físico.
- ▷ *tot* hace alusión a cantidades totales.

4.2. Formulación del problema

Sea Y una variable aleatoria (v.a.) cuya función de densidad (p.d.f., del inglés, *probability density function*) se quiere determinar a partir de un conjunto de medidas de una muestra de Y . Las medidas proporcionan un estimador X (con p.d.f. conocida) de la variable aleatoria Y (desconocida). Por lo tanto, la estimación X dependerá fuertemente de las características del instrumento de medida.

Se debe tener en cuenta que existen varios factores instrumentales que van a afectar a los resultados:

- ▷ **Exactitud:** debido a errores de medida, los valores medidos difieren en una cantidad aleatoria de los valores reales. Por tanto, cada suceso observado queda caracterizado por una 2-tupla (x, y) siendo x el valor experimental e y el valor real (y desconocido) del observable físico para ese suceso.

- ▷ **Eficiencia:** se define como la probabilidad de que un suceso sea detectado y dé lugar a una medida. Depende, en general, del valor real y . Se denota $\epsilon(y)$.
- ▷ **Presencia de fondo:** cabe la posibilidad de que se detecte un suceso que no se corresponde con un valor real de la dispersión principal, lo que daría lugar a errores en la estimación. Es preciso quitarlos previamente y no contar sucesos incorrectos.
- ▷ **Limitaciones estadísticas:** las distribuciones medidas se construyen a partir de los datos muestrales, que son inevitablemente finitos y se suponen extensibles a la generalidad.

Se particularizará el procedimiento presentado para el estudio de procesos en física de partículas. El objetivo será conseguir el histograma real de un observable físico a partir de las medidas realizadas sobre las muestras creadas tras la colisión. En la figura 4.1 se visualiza el objetivo del problema:

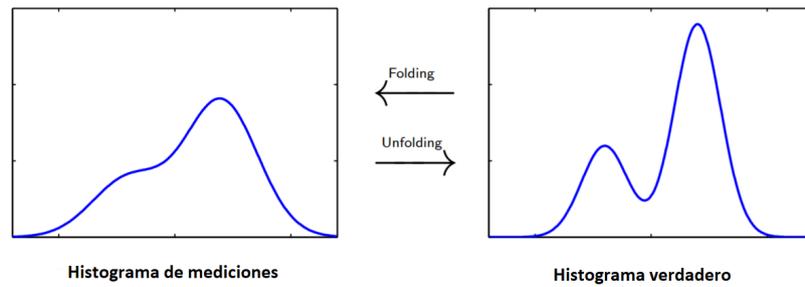


Figura 4.1: Esquemmatización del procedimiento de *unfolding* ([41]).

4.2.1. Histograma real (incógnita)

La p.d.f. de Y se denota por $f_{true}(y)$ y está caracterizada por un histograma de probabilidades normalizado de M intervalos.

$$p_j := \int_{bin_j} f_{true}(y) dy : \text{probabilidad de que } y \text{ caiga en el intervalo } j \in (1, \dots, M)$$

El número total de sucesos que tienen lugar en el experimento es desconocido y puede ser tratado como una v.a. En general, será diferente del número total de sucesos observados. Este razonamiento es particularizable a cada intervalo $j \in \{1, \dots, M\}$.

m_{tot} : número total de sucesos que tienen lugar (v.a.)

$$\mu_{tot} := E[m_{tot}] : \text{valor esperado}^2 \text{ de la v.a. } m_{tot}$$

²La **esperanza, media o valor esperado** de una variable aleatoria X es el número que formaliza la idea de valor medio de un fenómeno aleatorio. Suele denotarse por $\mu = E[X]$.

m_j : número de sucesos que tienen lugar en el intervalo j (M v.a. independientes)

$\mu_j := \mu_{tot} \cdot p_j$: número de sucesos esperado en el intervalo j

$\mu := (\mu_1, \dots, \mu_j, \dots, \mu_M)$: vector de valores esperados (estima el «histograma real»)

$p := (p_1, \dots, p_j, \dots, p_M) = \mu/\mu_{tot}$: vector de probabilidades (estima el «histograma real» normalizado)

Notar que los valores esperados, aunque estimen un número de sucesos, no son necesariamente enteros. Debido a las limitaciones experimentales, m_j no es observable directamente y el método *unfolding* se ocupa de la construcción de estimadores para μ_j .

4.2.2. Histograma experimental (medidas)

A partir de las medidas en los detectores, se toma una muestra de medidas de la v.a. X y se reconstruye el histograma con los valores obtenidos dividiendo los datos en N intervalos $i \in \{1, \dots, N\}$.

n_i : número de sucesos observados en el intervalo i (N v.a. independientes)

$n := (n_1, \dots, n_i, \dots, n_N)$: vector de medidas (compone el «histograma experimental»)

$n_{tot} := \sum_{i=1}^N n_i$: número total de sucesos observados

No obstante, estas medidas tienen una fuerte carga aleatoria y los valores obtenidos serían demasiado determinantes para el resultado del *unfolding*. Para evitar este efecto, será pertinente definir otra variable:

$\nu_i := E[n_i]$: valor esperado de la v.a. n_i

$\nu := (\nu_1, \dots, \nu_i, \dots, \nu_N)$: vector de valores esperados («histograma medido» medio)

La variable X puede ser multidimensional, es decir, contener una medida directa de la cantidad real Y y otras cantidades correlacionadas que proporcionan información extra sobre la misma. El número de intervalos N en los que se divide el «histograma experimental» puede ser mayor, menor o igual al número de intervalos M en los que se divide el «histograma real».

En muchos casos, se puede suponer que la probabilidad de que ocurran n_i sucesos sigue una **p.d.f. de Poisson**³ de parámetro ν_i .

³Esta distribución discreta expresa la probabilidad de que ocurra un número determinado de sucesos (entero no negativo) en un intervalo dado (de tiempo, espacio u otros) a partir de una frecuencia conocida (parámetro) y siendo cada suceso independiente.

Esta distribución es adecuada siempre que el número de veces que ocurra un suceso tome valores 0, 1, 2...; la ocurrencia de un suceso no afecte a la probabilidad de ocurrencia de otro suceso idéntico; la frecuencia con la que ocurren los sucesos no varía; dos sucesos no pueden tener lugar en el mismo instante y sea equivalente a una **p.d.f. binomial**⁴ donde el número total de sucesos es grande comparado con el número de éxitos, es decir, la probabilidad de éxito es baja (sucesos «raros»). Dadas las características del estudio realizado en este trabajo, es razonable pensar que se cumplen estas condiciones y las variables siguen la distribución de Poisson ya que son cuentas de sucesos.

Supuesto además que que estas N variables son independientes, las propiedades de la distribución de Poisson garantizan que la suma es otra variable de Poisson con parámetro el sumatorio de los parámetros, es decir:

$$P(n_i, \nu_i) = \frac{\nu_i^{n_i} e^{-\nu_i}}{n_i!} : \text{probabilidad de observar } n_i \text{ sucesos en el intervalo } i$$

$$\nu_{tot} = \sum_{i=1}^N \nu_i : \text{esperanza del número total de sucesos observados}$$

$$P(n_{tot}, \nu_{tot}) = \frac{(\nu_{tot})^{n_{tot}} e^{-\nu_{tot}}}{n_{tot}!} : \text{probabilidad de observar } n_{tot} \text{ sucesos en total}$$

Aunque las variables n_i puedan tener otras p.d.f. que no sea la de Poisson, los métodos de *unfolding* basados en maximizar la función de verosimilitud necesitan conocer la distribución de todas ellas.

Alternativamente, en el caso de que no se conocieran las p.d.f. de los datos $n = (n_1, \dots, n_N)$ se utilizarán métodos de *unfolding* basados en mínimos cuadrados de la función χ^2 . Para ello, es necesario definir:

$$V_{ij} := cov[n_i, n_j] : \text{matriz de covarianzas}^5$$

4.2.3. Variables del *unfolding*

Para poder continuar la deducción, se debe suponer que al menos una de las dos (funciones de distribución de todas las n_i o matriz de covarianzas) es conocida.

⁴Esta distribución discreta cuenta el número de éxitos en una secuencia de n (parámetro) experimentos de Bernoulli (dicotomía: «éxito» o «fracaso») independientes con probabilidad de éxito p (parámetro).

⁵La **varianza** de una variable aleatoria X es una medida de dispersión que se denota $\sigma^2 = \text{Var}[X]$, se define como $\sigma^2 \equiv E[(X - \mu)^2]$ y se prueba equivalente a $\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2$. La **covarianza** es un valor que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias X e Y , se define como $\text{Cov}(X, Y) \equiv E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$ simplificable a $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$. La **matriz de covarianzas** es una matriz que contiene las covarianzas entre los elementos de un vector, es decir, la generalización natural a dimensiones superiores.

Usando la ley de la probabilidad total, se pueden expresar el valor medio de sucesos observados como:

$$\begin{aligned}\nu_i &= \mu_{tot} \cdot P\left(\begin{array}{c} \text{suceso observado} \\ \text{en el intervalo } i \end{array}\right) \\ &= \mu_{tot} \int dy P\left(\begin{array}{c|c} \text{suceso observado} & \text{suceso detectado} \\ \text{en el intervalo } i & \text{de valor real } y \end{array}\right) \varepsilon(y) f_{true}(y) \\ &= \mu_{tot} \int_{bin_i} dx \int dy s(x|y) \varepsilon(y) f_{true}(y)\end{aligned}$$

siendo $s(x|y)$ la llamada **función de resolución** que se define como la p.d.f. de los sucesos de valor experimental x condicionado al valor real y . Dado que solo se consideran los sucesos que fueron eventualmente observados, la función está normalizada de modo que $\int s(x|y) dx = 1$. Se define la **función respuesta** $r(x|y) = s(x|y) \cdot \varepsilon(y)$ que da la probabilidad de observar x (incluyendo el efecto de la eficiencia, que es también desconocido) condicionado a que el valor real del observable físico sea y . Se dice que la distribución «real» está *folded*⁶ según la función respuesta y al cometido de estimar f_{true} se le llama *unfolding*.

Se define la **matriz de respuesta** $R_{ij} \in \mathcal{M}_{N \times M}$ que relaciona los vectores de esperanzas de los valores experimentales y de los valores reales. Esta matriz se construye a partir de la integral anterior sumando la integral en y para cada intervalo j .

$$\begin{aligned}\nu_i &= \sum_{j=1}^M R_{ij} \mu_j \text{ siendo } R_{ij} \text{ tal que} \\ R_{ij} &= \frac{\int_{bin_i} dx \int_{bin_j} dy s(x|y) \varepsilon(y) f_{true}(y)}{(\mu_j / \mu_{tot})} = \frac{\int_{bin_i} dx \int_{bin_j} dy s(x|y) \varepsilon(y) f_{true}(y)}{\int_{bin_j} dy f_{true}(y)} = \\ &= \frac{P(\text{suceso observado en el intervalo } i \text{ y valor real en el intervalo } j)}{P(\text{valor real en el intervalo } j)} = \\ &= P\left(\begin{array}{c|c} \text{observado} & \text{valor real} \\ \text{en el intervalo } i & \text{en el intervalo } j \end{array}\right),\end{aligned}$$

es decir, la matriz de respuesta es la probabilidad condicionada de que un suceso pertenezca al intervalo i en su valor experimental y al j en su valor real.

Notar que el número de intervalos y los límites del espacio no tienen por qué coincidir para el espacio experimental y el espacio real. De hecho, se ha dejado

⁶El término en español sería plegada, pero tampoco está extendido su uso.

libertad para que $N, M \in \mathbb{N}$ sean distintos y la matriz no sea cuadrada. El efecto que producen los elementos no diagonales de la matriz es «ensuciar» la estructura fina del histograma.

La matriz de respuesta depende de la p.d.f. de $f_{true}(y)$, es desconocida a *priori* y el objeto a determinar. Para poder continuar la deducción, se deben suponer asumibles las siguientes aproximaciones, es decir, se debe suponer que introducen un error despreciable en la matriz de respuesta.

- Se supondrá que los intervalos en Y son suficientemente pequeños para que sea válido aproximar la eficiencia y la función de resolución por funciones constantes a trozos (en los intervalos j), es decir, $\varepsilon(y) \simeq (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j, \dots, \varepsilon_M)$ y $s(x|y) \simeq (s_1(x), \dots, s_j(x), \dots, s_M(x))$. Así la dependencia de $f_{true}(y)$ se cancela y puede sacarse de la integral como una constante.
- Se asumirá que $s(x|y)$, $\varepsilon(y)$ y, en consecuencia, R_{ij} dependen únicamente del aparato de medida; así se ignoran otras dependencias de variables de las que no se tiene información (como puede ser $f_{true}(y)$ si el modelo no es totalmente independiente de las medidas) y se da por conocida la matriz R_{ij} .

En la práctica, la matriz de respuesta se puede determinar de dos formas diferentes:

- con la mejor aproximación disponible de $f_{true}(y)$ antes de la realización del experimento (como pueden ser las medias de los experimentos de calibración donde se conocen los valores reales de Y a *priori*) o
- utilizando simulaciones de Montecarlo basadas en la comprensión de los fenómenos físicos que tienen lugar en el detector.

Tanto la dependencia del modelo como el funcionamiento del detector deben ser tratados como posibles fuentes de errores sistemáticos. El segundo caso es el más habitual y el que se utilizará en este trabajo.

Sumando la matriz de respuesta a lo largo del índice del histograma experimental y utilizando que la función de resolución está normalizada, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^N R_{ij} = \sum_{i=1}^N \frac{\int_{bin\ i} dx \int_{bin\ j} dy s(x|y) \varepsilon(y) f_{true}(y)}{(\mu_j / \mu_{tot})} = \frac{\int_{bin\ j} dy \varepsilon(y) f_{true}(y)}{\int_{bin\ j} f_{true}(y) dy} \simeq \varepsilon_j,$$

es decir, se ha obtenido una relación entre la eficiencia en el intervalo j y la matriz de respuesta gracias a las aproximaciones introducidas.

$\varepsilon := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j, \dots, \varepsilon_M)$: vector de eficiencias constantes en cada intervalo del «histograma real» (aproximación)

Por otro lado, interesa estimar el número de sucesos incorrectamente detectados en cada intervalo i con otra v.a. que incluyan los efectos del fondo y los de las limitaciones de eficiencia y exactitud. Por conveniencia en la homogeneidad, se supone una que los intervalos en X son suficientemente pequeños para que sea una función constante a trozos.

$\beta := (\beta_1, \dots, \beta_i, \dots, \beta_N)$: vector de contajes incorrectos en cada intervalo del histograma experimental (aproximación)

En la práctica, los coeficientes β se determinarán con experimentos de calibración o con simulaciones de Montecarlo sobre los sucesos de fondo y sobre la respuesta del detector en cuestión.

Es conveniente introducir esta corrección en la ecuación matricial del *unfolding*:

$$\nu_i = \sum_{j=1}^M R_{ij} \mu_j + \beta_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

En lo sucesivo, se supondrá que el vector β es conocido, aunque se sabe que esto es solo cierto con cierta precisión y que el fondo es una fuente de errores sistemáticos en el resultado de *unfolding*.

En resumen, resolver el problema de *unfolding* es resolver la ecuación matricial $\nu = R\mu + \beta$ donde μ , ν y β son vectores columna y R una matriz y siendo R y β conocidas. El objetivo es construir estimadores $\hat{\mu}$ para el histograma real o, equivalentemente, \hat{p} para las probabilidades del histograma normalizado.

4.3. Solución directa: inversión de la matriz de respuesta

A la hora de construir un estimador para el vector μ del histograma real, es conveniente tener en cuenta las características del problema en cuestión.

Si se considera el caso $M=N$ (mismo número de intervalos en el histograma real que en el de observaciones), se podrá invertir la expresión matricial directamente. Para estimar ν , se toman los valores medidos. Así:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = R^{-1}(\nu - \beta) \\ \hat{\nu} = n \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\mu} = R^{-1}(n - \beta)$$

Como aval de esta expresión, se puede comprobar que coincide con:

- ▷ el resultado de maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud cuando las probabilidades $P(n_i; \nu_i)$ son poissonianas o binomiales

$$\log L(\mu) = \sum_{i=1}^N \log P(n_i; \nu_i)$$

- ▷ el resultado de minimizar la función de mínimos cuadrados

$$\chi^2(\mu) = \sum_{i,j=1}^N (\nu_i - n_i)(V^{-1})_{ij}(\nu_j - n_j)$$

Es conveniente estudiar las propiedades del estimador construido, en particular, interesa conocer sesgo y varianza.

$$E[\hat{\mu}_j] = \sum_{i=1}^N (R^{-1})_{ji} E[n_i - \beta_i] = {}^7 \sum_{i=1}^N (R^{-1})_{ji} (n_i - \beta_i) = \mu_j,$$

El sesgo de un estimador se define como la diferencia entre su esperanza y el valor numérico del parámetro que estima. Se puede ver que en este caso el sesgo es nulo y se dice que el estimador es insesgado.

$$\text{cov}[\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j] = \sum_{k,l=1}^N (R^{-1})_{ik} (R^{-1})_{jl} \text{cov}[n_k, n_l] = {}^8 \sum_{k,l=1}^N (R^{-1})_{ik} (R^{-1})_{jk} \nu_k$$

Como se tiene un estimador N-dimensional $\{\hat{\mu}_j\}$, se obtiene la matriz de covarianzas entre los valores esperados medios. Aunque no se incluya el cálculo por simplificar, es un estimador eficiente, es decir, tiene la mínima varianza posible de entre los estimadores insesgados (según el teorema de Rao-Cramer).

Conviene hacer una parada en el procedimiento para explicar visualmente cuáles son los datos y los resultados del *unfolding*. Como se vio en la figura 4.1, se busca obtener la relación entre el histograma real y el histograma de observaciones medido por el detector. Para ello, se ha expresado el problema en función de unas variables coherentemente construidas. En la figura 4.2 se muestran cuatro elementos fundamentales del problema:

1. μ : el histograma real (desconocido) que se busca estimar.

⁷ya que se asume que ν_i es insesgado, es decir, $\hat{\nu}_i = n_i$

⁸supuesto que las variables tienen p.d.f. de Poisson y, en ese caso, $\text{cov}[n_k, n_l] = \delta_{kl} \nu_k$

2. R : la matriz de respuesta, donde las fluctuaciones estadísticas de las p.d.f. de n se interpretan como la estructura fina; al invertir la matriz, estas fluctuaciones se amplifican.
3. n : el histograma experimental construido con las medidas de los procesos.
4. $\hat{\mu}$: la estimación de la distribución teórica obtenida usando la solución exacta $\hat{\nu} = n$ y con las barras de incertidumbre correspondientes a las desviaciones estándar.

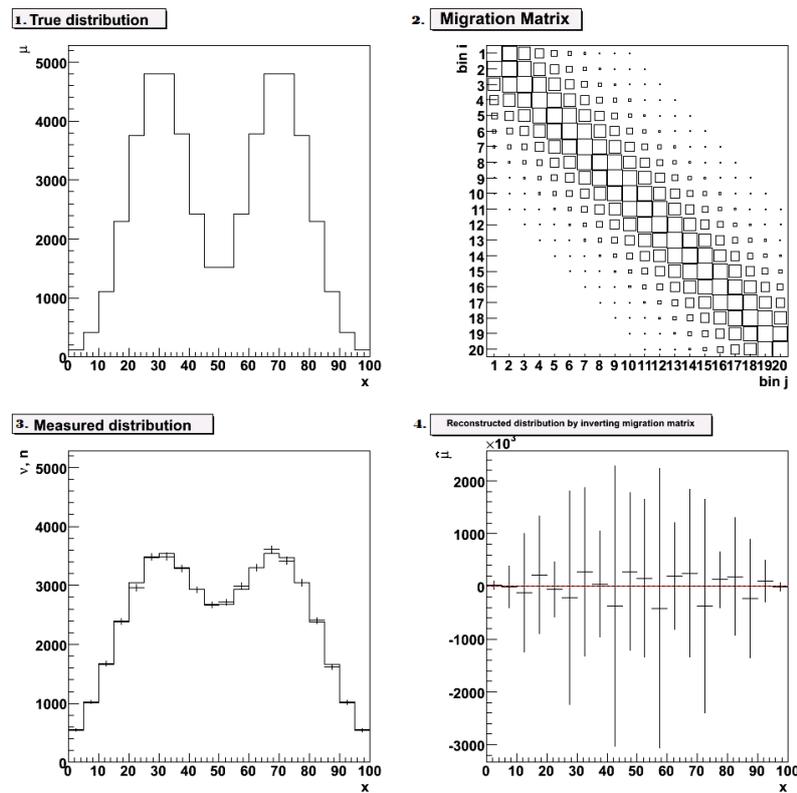


Figura 4.2: Elementos fundamentales del problema:

1. Histograma real, 2. Matriz de respuesta,
3. Histograma experimental, 4. Histograma estimado según el método *unfolding*

Como se puede apreciar, el parecido entre el histograma «real» y su estimación es reducido. La dependencia de las pequeñas variaciones cuando la matriz no es diagonal se traduce en un incremento de las incertidumbres y en la escala del histograma como se puede ver en 4. de la figura 4.2. Este hecho deja en evidencia el método. Se recuerda que se ha supuesto que los valores esperados de los datos eran los propios datos, sin tener en cuenta que es una v.a. y como tal está sujeta a fluctuaciones estadísticas que se han ignorado.

Dicho de otro modo, la matriz inversa de R está mal condicionada lo que significa que es muy sensible a pequeñas perturbaciones en la toma de datos. Por lo tanto, no va a ser tan sencillo como estimar μ por inversión directa de la expresión $\hat{\mu} = R\hat{v} = Kn$. En la figura 4.3 se muestra un esquema del error que se puede cometer con este procedimiento.

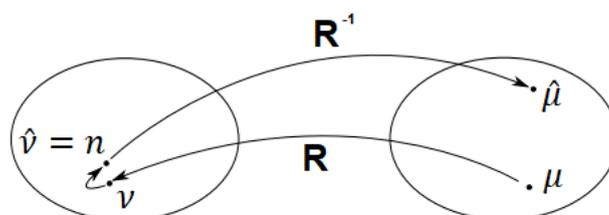


Figura 4.3: Inversión entre los espacios real y experimental.

A pesar de todo, la inversión de la matriz de respuesta es un buen punto de partida para otros métodos. Como se trata de un estimador insesgado y eficiente, se debe buscar la manera de construir estimadores $\hat{\mu}$ que sean algo sesgados que consigan reducir la varianza hasta un nivel razonable. Resumiendo, la clave será encontrar el equilibrio óptimo entre sesgo y varianza.

En lo que sigue, se van a utilizar técnicas estadísticas clásicas, usando el sesgo y la varianza como buenos criterios para juzgar la validez de la solución y conectando con las técnicas bayesianas cuando sea posible.

Supuesto que $N \neq M$, es decir, el número de intervalos de ambos histogramas no coincida, pueden darse dos situaciones:

- ▷ Si $N > M$, el sistema es indeterminado y la solución de inversión directa no es única. Se han desarrollado métodos para elegir la más conveniente, de entre las posibles, para el estimador $\hat{\mu}$.
- ▷ Si $N < M$, el sistema está sobredeterminado y, en general, no existe solución exacta. Se puede construir una aproximación utilizando métodos de máxima verosimilitud o de mínimos cuadrados.

4.4. Método: *unfolding* con factores de corrección

La sección anterior se cerró mencionando que será preciso buscar alternativas para resolver el problema de mal condicionamiento de la inversión directa. Esto se

puede lograr introduciendo conocimiento *a priori* de alguna de las propiedades del histograma real.

Considerando el caso en el que $M = N$, una de las técnicas más simples y usuales es obtener el estimador de μ_i con unos **factores de corrección** multiplicativos que son determinados utilizando el programa de Montecarlo para el modelo del proceso en estudio y para una simulación del efecto del aparato de medida. Se denotan por C_i y la expresión del estimador de μ_i es

$$\hat{\mu}_i = C_i(n_i - \beta_i), \text{ siendo } \beta_i \text{ el valor de fondo esperado}$$

Los factores C_i son determinados corriendo el programa dos veces:

- una primera sin la simulación del detector donde se obtiene una predicción de los valores reales de cada intervalo μ_i^{MC} y
- otra con la simulación del detector donde se obtiene una predicción de los valores observados en cada intervalo ν_i^{MC} .

El factor de corrección es el ratio entre ambos $C_i = \mu_i^{MC}/\nu_i^{MC}$. A partir de ahora se supondrá que es posible generar datos suficientes de Montecarlo para que los errores estadísticos en los factores de corrección sean despreciables. En el caso de que esto no fuera posible, se introducen las incertidumbres en C_i en el error del estimador y se propagan según los procedimientos habituales.

Si los efectos de exactitud son despreciables, la matriz de respuesta es diagonal

$$\left. \begin{array}{l} R_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_j \\ C_i = \frac{\mu_i}{\nu_i} \\ \nu_i^{sig} = \nu_i - \beta_i \end{array} \right\} \Rightarrow \nu_i^{sig} = \varepsilon_i\mu_i \Rightarrow C_i = 1/\varepsilon_i,$$

siendo ν_i^{sig} el valor esperado de entradas en el intervalo i sin fondo.

Así, $1/C_i$ juega el papel de **eficiencia generalizada** que, de hecho, puede tomar valores mayores que la unidad cuando la matriz de respuesta tiene elementos no nulos fuera de la diagonal principal.

Conviene estudiar el sesgo y la varianza del estimador que se ha construido.

$$E[\mu_i] = C_i E[n_i - \beta_i] = C_i(\nu_i - \beta_i) = \frac{\mu_i^{MC}}{\nu_i^{MC}} \nu_i^{sig} = \left(\frac{\mu_i^{MC}}{\nu_i^{MC}} - \frac{\mu_i}{\nu_i^{sig}} \right) \nu_i^{sig} + \mu_i$$

$$cov[\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j] = C_i^2 cov[n_i, n_j] = {}^9 C_i^2 \delta_{ij} \nu_i$$

⁹en el caso de que n_i sean variables de Poisson independientes con valores esperados ν_i

Por lo tanto, solo es insesgado en el caso en el que los ratios μ_i/ν_i^{sig} coincidan en el modelo de Montecarlo y el experimento real. En muchos casos, los C_i son del orden de la unidad y la varianza del estimador y la de la solución exacta son aproximadamente iguales intervalo a intervalo. Además, la resolución numérica con este método es sencilla de implementar y ni siquiera necesita invertir la matriz.

En la figura 4.4 se ilustran los elementos principales del método de factores de corrección que mejora el *unfolding* de la sección 4.3:

1. μ : el histograma real (desconocido) que se busca estimar.
2. n, ν : el histograma experimental construido con las medidas de los procesos.
3. C : los factores de corrección, que se han construido inicialmente con los datos y la matriz de respuesta $\{\mu_{(0)}^{MC} = n, \nu_{(0)}^{MC} = R\mu_{(0)}^{MC}\}$ e itera con $\mu_{(i)}^{MC} = \hat{\mu}_{(i-1)}$.
4. $\hat{\mu}$: la estimación de la distribución tras varias iteraciones. No está asegurada la convergencia, por eso en la práctica se va a necesitar «regularización».

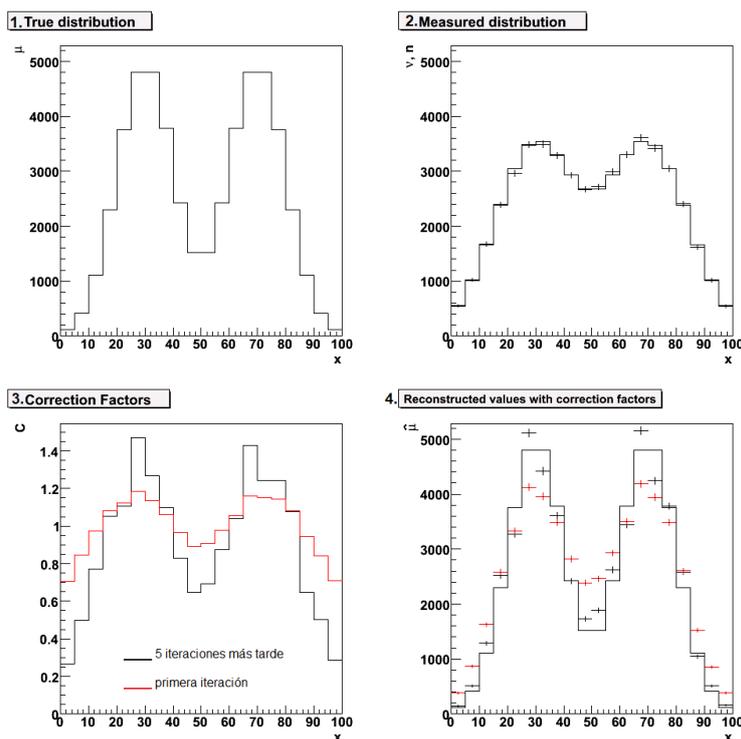


Figura 4.4: Elementos fundamentales del problema: 1. Histograma real, 2. Histograma experimental, 3. Factores de corrección, 4. Histograma estimado

El mayor hándicap de este método es, sin duda, que las iteraciones para reducir el sesgo ajustan los parámetros del programa de Montecarlo para que la distribución ν^{MC} y los datos sin fondo $n - \beta$ se aproximen. En consecuencia, se está llevando la

estimación $\hat{\mu}$ hacia la predicción del modelo μ^{MC} e imposibilita la tarea de comprobar objetivamente el buen funcionamiento del modelo en estudio.

En todo caso, es crucial tener una buena estimación de la incertidumbre sistemática que se está introduciendo debido a la dependencia de los factores de corrección tanto en los resultados del *unfolding* como en los modelos de Montecarlo.

4.5. Método: *unfolding* regularizado

Un posible enfoque alternativo a los factores de corrección, cuyas desventajas se mencionan al final de la Sección 4.4, es imponer cierta suavidad en las medidas del estimador del histograma real, es decir, cierta continuidad entre los intervalos. Esta técnica presupone que la distribución teórica es relativamente suave y, por tanto, impone una hipótesis adicional. Se denomina **regularización** de la distribución *unfolded*.

El punto inicial del proceso es la estimación $\hat{\mu}$ por inversión directa, que esta caracterizada tanto para el máximo de $\log L(\mu)$ (función de verosimilitud) como para el mínimo de $\chi^2(\mu)$ (mínimos cuadrados). De hecho, ambas son equivalentes y se pueden relacionar $\log L = -\chi^2/2$.

Se considera una región del espacio de fases de μ en torno a la solución óptima, donde existe una concordancia aceptable entre los valores de ν y los datos n .

$$\begin{aligned} \log L(\mu) &\geq (\log L(\mu))_{\text{máx}} - \Delta(\log L) \\ &\quad \text{ó} \\ \log \chi^2(\mu) &\leq (\chi^2(\mu))_{\text{mín}} - \Delta(\chi^2) \end{aligned}$$

Se define la **función de regularización**, denotada por $S(\mu)$, que mide la suavidad de la solución. Se definirán varias funciones posibles en la subsección 4.5.1.

La idea es escoger la estimación cuyo valor de la función de regularización sea máximo de entre los que:

1. Cumplan la inecuación. Para ello, se define el **parámetro de regularización** α que es un multiplicador de Lagrange que fija Δ .
2. El número total de sucesos estimados sea igual al número de sucesos observados en total, es decir, $\hat{\nu}_{tot} = \sum_{i=1}^N \hat{\nu}_i =^{10} n_{tot}$. Para ello se define otro parámetro λ que también es un multiplicador de Lagrange.

¹⁰La relación $\nu = R\mu + \beta$ se cumple siempre; por tanto, $\hat{\nu} = R\hat{\mu} + \beta$ también es cierta.

La solución del problema pasa por encontrar un máximo de la combinación lineal ponderada:

$$\varphi(\mu, \lambda) := \alpha \log L(\mu) + S(\mu) + \lambda \left[n_{tot} - \sum_{i=1}^N \nu_i \right]$$

1. Estudio de los valores extremos del parámetro de regularización (para $\lambda = 0$):
 - $\alpha = 0$ da lugar a la función más «suave» posible, pero ignora los datos n
 - $\alpha \rightarrow \infty$ recupera la solución máximo verosímil (inversión directa)
2. Fijando $\partial\varphi/\partial\lambda = 0$, se consigue que $\sum_{i=1}^N \nu_i = n_{tot}$. Notar que esta condición, aunque no se satisface automáticamente, es menos restrictiva que $\hat{\nu} = n$ (utilizada en la sección 4.3).

Por último, debe suponerse un comportamiento suficientemente regular de $\log L(\mu)$ y $S(\mu)$ para que exista al menos un máximo local.

4.5.1. Varias funciones de regularización

Se van a introducir las funciones de regularización más adecuadas desarrolladas hasta el momento:

▷ Función de Tikhonov

La idea fue sugerida por Phillips (en [22]) y Tikhonov (en [4], [5]) independientemente. Considera una medida de la suavidad como el valor medio de los cuadrados de alguna derivada de la distribución real. La integración se extiende a todos los valores permitidos de Y y el signo menos se toma por convenio ya que se quiere maximizar Φ .

$$S(f_{true}(y)) := - \int \left(\frac{d^k f_{true}(y)}{dy^k} \right)^2 dy$$

Aunque en principio se puede considerar una combinación lineal entre los términos de las distintas derivadas, en la práctica se suele fijar un valor de k .

En el caso de representar la p.d.f. de Y con histogramas, la integral se aproxima por diferencias finitas de orden k (fijo).

$$k = 1 : S(\mu) := - \sum_{i=1}^{M-1} (\mu_i - m u_{i+1})^2$$

$$k = 2 : S(\mu) := - \sum_{i=1}^{M-1} (-\mu_i + 2\mu_{i+1} - m u_{i+2})^2$$

$$k = 3 : S(\mu) := - \sum_{i=1}^{M-1} (-\mu_i + 3\mu_{i+1} - 3m u_{i+2} + \mu_{i+3})^2$$

Se suele considerar el valor $k = 2$ porque entonces $S(\mu)$ es una medida de la curvatura media. De hecho, se ha utilizado con asiduidad en la física de partículas para el *unfolding* de funciones de estructura.

Por otro lado, para cualquier valor de k y cualquier ancho de banda, la función de Tikhnov puede expresarse como:

$$S(\mu) = - \sum_{i,j=1}^M G_{ij} \mu_i \mu_j = -\mu^T G \mu$$

donde $G \in \mathcal{M}_{M \times M}$ es una matriz de constantes simétrica.

Se puede consultar una descripción más detallada del método y sus aplicaciones en [6], [9], [29], [30], [50].

▷ Funciones basadas en la entropía

En estadística mecánica, la entropía es una propiedad extensiva de un sistema termodinámico estrechamente relacionada con el número de microestados (configuraciones microscópicas) que son consistentes con las cantidades macroscópicas que caracterizan el sistema (volumen, presión y temperatura).

La entropía de una distribución de probabilidad $p = (p_1, \dots, p_M)$ se define, en [10], con el nombre de **entropía de Shannon** según la expresión:

$$H(p) := - \sum_{i=1}^M p_i \log p_i$$

La idea es interpretar la entropía como una medida de la suavidad del histograma $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_M)$ y utilizarla como función de regularización:

$$S(\mu) = H(\mu) = - \sum_{i=1}^M \frac{\mu_i}{\mu_{tot}} \log \frac{\mu_i}{\mu_{tot}}$$

Los estimadores basados en esta función se dice que están contruidos según el principio de máxima entropía.

La relación entre la entropía y la suavidad se justifica teniendo en cuenta que si $\Omega(\mu) = \mu_{tot}! / \prod_{i=1}^M \mu_i!$ representa el número total de posibles histogramas contruidos con μ_{tot} entradas, entonces:

$$\log \Omega \approx {}^{11} \mu_{tot} (\log \mu_{tot} - 1) - \sum_{i=1}^M \mu_i (\log \mu_i - 1) = - \sum_{i=1}^M \mu_i \log \frac{\mu_i}{\mu_{tot}} = \mu_{tot} S(\mu)$$

Se utilizará $\log \Omega$ para generalizar la función cuando los μ_i no son enteros. Como posibles situaciones extremas:

- Si todos los sucesos se concentran en un único intervalo, el grado de suavidad es mínimo y, como solo pueden colocarse de una manera, $\Omega = 1$ y también la entropía es mínima.

¹¹Utilizando la aproximación de Stirling $\log n! \approx n(\log n - 1)$ que es válida para n grandes.

- Si todos los μ_i son iguales, entonces la entropía es máxima (el denominador de Ω es mínimo) y la suavidad también ya que se corresponde con la distribución uniforme.

▷ Función basada en la entropía de Shannon-Jaynes

Se define la **distribución de referencia** $q = (q_1, \dots, q_M)$ que es la que a priori más se parece en forma a la distribución real normalizada $p = \mu/\mu_{tot}$. Supóngase conocida q , pero no una forma para cuantificar su grado de adecuación a p . La función de regularización que se toma es:

$$S(\mu) = K(p; q) := - \sum_{i=1}^M p_i \log \frac{p_i}{Mq_i}$$

siendo $K(p; q)$ la **entropía de cruce** o la **entropía de Shannon-Jaynes** según [48] o [24] respectivamente.

En este caso, la suavidad también está construida según el principio de máxima entropía. De hecho, notar que $K(p; q) = H(p)$ cuando la distribución de referencia es la distribución uniforme donde $q_i = \frac{1}{M} \forall i \in \{1, \dots, M\}$

Se recuerda que la entropía de Shannon era máxima cuando la distribución era uniforme y que, en consecuencia, el sesgo introducido en los estimadores $\hat{\mu}$ arrastran el resultado hacia una mayor uniformidad en la distribución. Se puede probar que la entropía de cruce $K(p; q)$ es máxima cuando las probabilidades p son iguales a la distribución de referencia q . Por lo tanto, el efecto de usar esta última función de regularización es un sesgo menor (o nulo) del estimador $\hat{\mu}$ cuando la distribución «real» es parecida (o idéntica) a la distribución de referencia.

4.5.2. Características de los estimadores

Los estimadores $\hat{\mu}$ son funciones de los datos n y por tanto son v.a. intrínsecamente que se obtienen maximizando la función $\varphi(\mu, \lambda)$. Se puede utilizar la fórmula de propagación de errores en la matriz de covarianza¹² para obtener una expresión de la varianza del estimador:

$$U_{ij} := cov[\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j] = \sum_{k,l=1}^N \frac{\partial \hat{\mu}_i}{\partial n_k} \frac{\partial \hat{\mu}_j}{\partial n_l} cov[n_k, n_l] = \sum_{k,l=1}^N \frac{\partial \hat{\mu}_i}{\partial n_k} \frac{\partial \hat{\mu}_j}{\partial n_l} V_{kl}$$

Se definen A y B :

¹²Sea un conjunto de m funciones $y_i(x)$, la matriz de covarianza puede aproximarse por $U_{kl} = cov[y_k, y_l] \approx \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \right]_{x=\mu} V_{ij}$; matricialmente $U = AVA^T$ con $A_{ij} = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right]_{x=\mu}$.

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu_i \partial \mu_j} & i, j = 1, \dots, M \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu_i \partial \lambda} & i = 1, \dots, M; j = M+1 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} & i, j = M+1 \end{cases} \quad B_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu_i \partial n_j} & i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial n_j} & i = M+1; j = 1, \dots, N \end{cases}$$

que son matrices A cuadrada simétrica de dimensión $M + 1$ y B de dimensiones $(M + 1) \times N$ que dependen de la función $\varphi(\mu, \lambda)$ y se evalúan en las estimaciones de μ y ν obtenidas en el experimento. Así, se define la matriz C como $C_{ik} := -(A^{-1}B)_{ik} = (\partial \hat{\mu}_i / \partial n_k)$ y que simplifica la varianza del estimador:

$$U = CVC^T$$

Se pueden destacar varias propiedades del sesgo de los estimadores de los métodos de *unfolding* regularizado:

- El sesgo viene dado por funciones de la distribución real.
- En general, estas funciones no son constantemente nulas, pero pueden serlo para ciertos valores de μ .
- La idea es reducir el sesgo al máximo en base a las propiedades conocidas *a priori* de μ . En los siguientes casos, se consigue $b_i = 0$.
 - Si $\mu \sim$ distribución uniforme, con $\hat{\mu}$ basado en Tikhonov con $k = 1$.
 - Si $\mu \sim$ distribución lineal, con $\hat{\mu}$ basado en Tikhonov con $k = 2$.
 - Si $\mu \sim$ distribución de referencia(q), con $\hat{\mu}$ basado en la entropía de cruce.

En general, se puede obtener una expresión de su sesgo aproximado, válido para $(\hat{\nu}_j - n_j)$ pequeño, es decir, para valores de α grandes.

$$b_i = E[\hat{\mu}_i] - \mu_i \Rightarrow \hat{b}_i = \sum_{j=1}^N C_{ij}(\hat{\nu}_j - n_j)$$

Gracias a la propagación de errores de la matriz de covarianza¹², se obtiene la varianza de esta aproximación del sesgo (despreciando la varianza de la matriz C):

$$W_{ij} := cov[\hat{b}_i, \hat{b}_j] = \sum_{k,l=1}^N C_{ik} C_{jl} cov[(\hat{\nu}_k - n_k), (\hat{\nu}_l - n_l)] \Rightarrow {}^{13}W = (CR - I)U(CR - I)^T$$

El desarrollo completo de las deducciones teóricas se pueden consultar en [30].

¹³usando la ecuación matricial $\hat{\nu}_k = \sum_m R_{km} \hat{\mu}_m$ y la expresión de la matriz de covarianza de la distribución real $U = CVC^T$

4.5.3. Elección del valor del parámetro de regularización

Se recuerda que el valor de α , parámetro de regularización, determina inequívocamente el valor de Δ (de la función de verosimilitud o de mínimos cuadrados). Se puede cuantificar el equilibrio (a optimizar) entre el sesgo y la varianza de varias maneras a partir de las expresiones deducidas en la subsección 4.5.2.

Se presentan dos posibles medidas del equilibrio:

$$MSE = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (U_{ii} + \hat{b}_i^2) \quad MSE' = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{(U_{ii} + \hat{b}_i^2)}{\hat{\mu}_i}$$

siendo MSE la media del error cuadrático por intervalo y MSE' el aumento del error cuadrático medio debido a limitaciones experimentales si $\mu \sim \text{Poisson}$.

$$\Delta \chi_{eff}^2 = (\hat{\nu} - n)^T RCV^{-1} (RC)^T (\hat{\nu} - n) \quad \chi_b^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{\hat{b}_i^2}{W_{ii}}$$

siendo $\Delta \chi_{eff}^2$ el error cuadrático medio efectivo, que tiene en cuenta como se ajustan $\hat{\nu}_i$ y los datos n_i , y χ_b^2 suma ponderada de sesgos cuadrados, que mide el incremento del sesgo.

Es razonable pedir que estas cantidades sean pequeñas. El procedimiento práctico, cuyo resultado se resume en la figura 4.5, será el siguiente:

1. Probar un valor de α inicial.
2. Computar el estimador $\hat{\mu}$ maximizando $\varphi(\mu, \lambda)$.
3. Iterar hasta que se satisface una condición fijada sobre el «cuantificador» escogido.

En la figura 4.5 se muestra:

- a la izquierda, los histogramas real, medido y *unfolded* correspondientes al valor α óptimo; las barras de incertidumbre vienen determinadas por $\sqrt{U_{ii}}$ y
- a la derecha, el sesgo estimado (\hat{b}) y sus desviaciones estándar $\sqrt{W_{ii}}$.

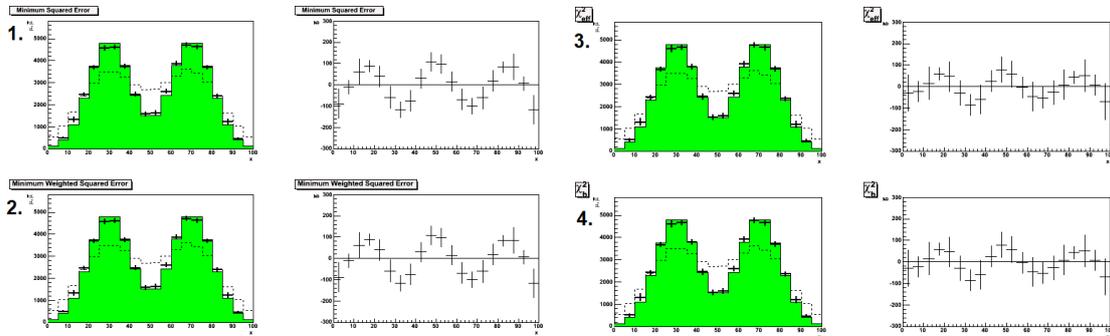


Figura 4.5: Solución del problema para los distintos «cuantificadores»:

1. MSE , 2. MSE' , 3. $\Delta \chi_{eff}^2$, 4. χ_b^2

Qué criterio seguir para escoger α es un problema que todavía se está discutiendo en la actualidad ya que no hay una solución claramente óptima. Se pueden consultar estas y otras opciones ampliamente justificadas en [6],[28], [30],[38]. Las estimaciones finales son bastante estables en la mayoría de los casos.

4.6. Algoritmo: TUnfold

El algoritmo que se va a utilizar en este trabajo para corregir los efectos de migración y del fondo se llama **TUnfold**. Es una herramienta informática desarrollada para distribuciones multidimensionales utilizando la librería de ROOT.

4.6.1. Características

Las características más notables del *unfolding* que programa son:

- Para que los resultados sean fiables, $N \geq M$ recordando que N denota el número de intervalos en los que se divide el histograma de datos («histograma experimental») y M , el número de intervalos del histograma que se extrae con el método de *unfolding* (estimación del «histograma real»).
- La matriz de covarianzas de los datos experimentales $V = cov[n_i, n_j]$ y la matriz de respuesta R deben ser de rango máximo¹⁴.
- Solventa las incertidumbres en la matriz de respuesta restando el fondo y propagando las incertidumbres estadísticas y sistemáticas.
- Cuando es necesaria regularización, realiza un ajustes de mínimos cuadrados con la función de regularización de Tikhonov. El parámetro de regularización se determina con el método de la L-curva o con el de los coeficientes de correlación (cuyos procedimientos se explica en la subsección 4.6.4).
- También implementa una restricción de área opcional.

El algoritmo devuelve, a partir de los datos, $\hat{\mu}$ el vector de estimaciones de los valores del observable físico en cada intervalo fijado (tratado como v.a.) y su matriz de covarianzas $U := Cov[\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j]$.

¹⁴El rango de una matriz es el número máximo de filas o columnas que son linealmente independientes. Se puede probar que el rango fila y el rango columna siempre son iguales.

4.6.2. Resolución del lagrangiano

La resolución del *unfolding* se lleva a cabo obteniendo las soluciones estacionarias del lagrangiano adecuado en cada problema.

$$\mathcal{L}(m, \lambda) = \underbrace{(n - Rm)^T V_{ij}^{-1} (n - Rm)}_{\mathcal{L}_1} + \underbrace{\tau^2 (m - f_b m_0)^T (L^T L) (m - f_b m_0)}_{\mathcal{L}_2} + \underbrace{\lambda (n_{tot} - \varepsilon^T m)}_{\mathcal{L}_3}$$

El término \mathcal{L}_1 se corresponde con la minimización de mínimos cuadrados, siendo:

- ▷ El vector de datos n tiene N filas y la matriz de covarianzas V_{ij} suele ser diagonal, aunque el algoritmo también es válido cuando no lo es.
- ▷ El vector m se corresponde con el resultado del *unfolding* que tiene M filas.
- ▷ Los elementos de la matriz de respuesta R_{ij} representan para cada fila j de m (teórico) las probabilidades de estar en el intervalo i de n (medidas). Esta matriz suele determinarse con simulaciones de Montecarlo.

El término \mathcal{L}_2 cuantifica la regularización que modera las fluctuaciones de n (consecuencia de las fluctuaciones estadísticas de m); solo se considera cuando esta es necesaria. Sus elementos son:

- ▷ El parámetro τ (constante) mide la regularización.
- ▷ La matriz L tiene M columnas y M_R filas que son las M_R condiciones de regularización.
- ▷ El vector de sesgo $f_b m_0$ esta compuesto por un factor de regularización f_b y un vector m_0 . En el caso más simple, $L = \mathbb{I}_M^{15}$, $f_b = 0$, $M_R = M$ y $\mathcal{L}_2 = \tau^2 \|m\|^2$.

El término \mathcal{L}_3 es una restricción de área y también es opcional. Este sumando corrige la normalización de m por la eficiencia ε y mejora la coherencia del resultado con n_{tot} . Dicho de otro modo, limita el sesgo introducido al aplicar el método a distribuciones de Poisson a pesar de que solo es estrictamente válido para distribuciones normales. Se recuerda que:

- ▷ El vector de datos n tiene N filas y la matriz de covarianzas V_{ij} suele ser diagonal, aunque el algoritmo también es válido cuando no lo es.
- ▷ El vector m se corresponde con el resultado del *unfolding* que tiene M filas.
- ▷ Los elementos de la matriz de respuesta R_{ij} representan para cada columna j de m (teórico) las probabilidades de estar en el intervalo i de n (medidas). Esta matriz suele determinarse con simulaciones de Montecarlo.

¹⁵ \mathbb{I}_M denota la matriz identidad, es decir, la matriz diagonal de unos de dimensión M .

El punto estacionario de $\mathcal{L}(x, \lambda)$ se obtiene imponiendo las condiciones de un mínimo, es decir, igualando las primeras derivadas parciales a 0 y despejando los valores de las variables m^* y λ^* en el mínimo de las ecuaciones.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial m_j} = -2(R^T V^{-1}(n - Rm))_j + 2\tau^2((L^T L)(m - f_b m_0))_j - \lambda \varepsilon_j = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial \lambda} = n_{tot} - \varepsilon^T m = 0 \end{cases}$$

Una manera sencilla de resolver el sistema es teniendo en cuenta que las M ecuaciones escalares para cada $j \in \{1, \dots, M\}$ se pueden agrupar en una sola ecuación matricial de donde se va a despejar directamente el vector m^* que minimiza el valor del lagrangiano:

$$\left[-2R^T V^{-1}(n - Rm) + 2\tau^2(L^T L)(m - f_b m_0) - \lambda \varepsilon \right]_{\{m=m^*\}} = 0$$

Además, el sumando correspondiente a derivar \mathcal{L}_3 no depende de la incógnita m^* , por lo tanto, se puede despejar el valor del vector para el que se alcanza el mínimo del lagrangiano cuando $\lambda = 0$ que se va a denotar por m_0^* y, en función de este, obtener la solución general. Es decir:

$$\begin{aligned} \left[-2R^T V^{-1}(n - Rm) + 2\tau^2(L^T L)(m - f_b m_0) \right]_{\{m=m_0^*\}} &= 0 \\ \left[-R^T V^{-1}n + R^T V^{-1}Rm + \tau^2 L^T L m - \tau^2 L^T L f_b m_0 \right]_{\{m=m_0^*\}} &= 0 \\ \left[R^T V^{-1}Rm + \tau^2 L^T L m \right]_{\{m=m_0^*\}} &= R^T V^{-1}n + \tau^2 L^T L f_b m_0 \\ \underbrace{\left[R^T V^{-1}R + \tau^2 L^T L \right]}_{E \in \mathcal{M}_{M \times M}} m^* &= \underbrace{R^T V^{-1}n + \tau^2 L^T L f_b m_0}_{k \in \mathcal{M}_{M \times 1}} \Rightarrow m_0^* = m^*|_{(\lambda=0)} = E^{-1}k \end{aligned}$$

Una vez resuelto esto, se retoma el caso general en el que aparece el sumando de \mathcal{L}_3 en la ecuación matricial y se obtiene el valor del vector m^* que minimiza el lagrangiano para cualquier valor de λ sumando el término multiplicado por un factor $1/2$ en el lado derecho de la ecuación.

$$Em^* = k + \frac{1}{2}\lambda \varepsilon \implies m^* = \underbrace{E^{-1}k}_{m_0^*} + \frac{1}{2}\lambda E^{-1}\varepsilon$$

A continuación, se obtiene el valor óptimo del parámetro λ^* introduciendo la expresión obtenida para $m^*(\lambda)$ en la segunda ecuación, es decir, se despeja el parámetro de la ecuación $n_{tot} - \varepsilon^T m^*(\lambda) = 0$.

$$n_{tot} - \varepsilon^T \left[m_0^* + \frac{\lambda E^{-1}\varepsilon}{2} \right]_{\{\lambda=\lambda^*\}} = 0 \implies n_{tot} - \varepsilon^T m_0^* - \left[\frac{\lambda \varepsilon^T E^{-1}\varepsilon}{2} \right]_{\{\lambda=\lambda^*\}} = 0 \implies \lambda^* = 2 \frac{n_{tot} - \varepsilon^T m_0^*}{\varepsilon^T E^{-1}\varepsilon}$$

En conclusión, el punto estacionario solución del sistema resultante viene dado por las expresiones siguientes:

$$\begin{cases} m = E^{-1}k + \frac{(n_{tot} - \varepsilon^T E^{-1}k)}{\varepsilon^T E^{-1}\varepsilon} E^{-1}\varepsilon \\ \lambda = 2 \frac{(n_{tot} - \varepsilon^T E^{-1}k)}{\varepsilon^T E^{-1}\varepsilon} \end{cases}$$

Por último, el algoritmo calcula la matriz de covarianzas de la distribución «real» m (denotada por U) a partir de la matriz de covarianzas de la distribución «experimental» n (denotada por V) y de la matriz de derivadas parciales de m_j con $j \in \{1, \dots, M\}$ respecto a n_i con $i \in \{1, \dots, N\}$ (denotada por D).

$$(D^{mn})_{ji} := \frac{\partial m_j}{\partial n_i} = (E^{-1}R^T V^{-1})_{ji} + (E^{-1}\varepsilon)_j \frac{1 - ((E^{-1}R^T V^{-1})^T \varepsilon)_i}{\varepsilon^T E^{-1}\varepsilon}$$

$$U_{ij} = D^{mn} V_{ij} (D^{mn})^T$$

4.6.3. Inicialización del algoritmo

Se necesitan conocer los valores de inicialización de la matriz de respuesta R_0 y el vector de datos experimentales m_0 en los que se va a inicializar el algoritmo.

Se puede definir una primera aproximación a la matriz de respuesta $R_0 \in \mathcal{M}_{(N+1) \times M}$ contando sucesos de las simulaciones de Montecarlo. Tiene una fila más que la matriz R (denotada con el subíndice 0) que la matriz R que cuantifica aquellos sucesos que se generaron, pero no se reconstruyeron. Es decir, los elementos de la matriz $(R_0)_{ij}$ contabilizan los sucesos de Montecarlo que fueron generados en el intervalo $j \in \{1, \dots, M\}$ de m y reconstruidos en el intervalo $i \in \{1, \dots, N\}$ o no fueron reconstruidos en ningún intervalo $i = 0$ de n . Por analogía, se definen las eficiencias para la matriz R_0 teniendo en cuenta sus dimensiones:

$$e_j := \sum_{i=0}^N (R_0)_{ij} \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}$$

Las expresiones de R_0 y m_0 para la primera iteración del algoritmo son entonces:

$$R_{ij} = \frac{(R_0)_{ij}}{e_j} \quad m_0 = e_j$$

4.6.4. Regularización

En la literatura hay bastantes alternativas para escoger el valor del parámetro de regularización (cuando esta es necesaria), τ . Se presentan aquí los dos procedimientos que se implementan en este algoritmo con este propósito. En ambos casos, el objetivo

es conseguir el valor del parámetro que sea el punto de mejor intercambio entre introducir sesgo y disminuir varianza de la estimación.

▷ **Máxima curvatura de la L-curva:** la idea del método es encontrar el punto de curvatura máxima de las funciones:

- $L_m := \log \mathcal{L}_1$ que mide el grado de compatibilidad entre el histograma estimado y los datos y
- $L_n := \log \frac{\mathcal{L}_2}{\tau^2}$ que mide el grado de compatibilidad de n con la condición de regularización.

Notar que para valores pequeños de $\tau \rightarrow 0$, L_m y L_n son mínima y máxima respectivamente porque $\mathcal{L}_2 \rightarrow 0$ y m es el punto estacionario de $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3$. A medida que τ aumenta, L_m y L_n aumenta y disminuye respectivamente porque el término \mathcal{L}_2 domina el lagrangiano. La curva paramétrica de L_n frente a L_m suele tener una «esquina» que le da forma de «L» a la función. La curvatura de la L-curva es

$$\mathcal{C} := \frac{d^2 L_n dL_m - d^2 L_m dL_n}{[(dL_m)^2 + (dL_n)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

siendo las derivadas de las curvas respecto del parámetro $t := \log \tau$ cuyos valores se aproximan. El método de *unfolding* se repite para varios valores de τ y se obtiene el máximo de $\mathcal{C}(t)$ con la ayuda de una parametrización.

▷ **Minimización global de los coeficientes de correlación:** dada la matriz de covarianzas U del histograma «real», se define el coeficiente de correlación $j \in \{1, \dots, M\}$ de m

$$\rho_j := \sqrt{1 - \frac{1}{(U^{-1})_{jj} \cdot (U)_{jj}}}$$

El procedimiento implementado consiste en repetir el *unfolding* para varios $t := \log \tau$ y obtener los respectivos coeficientes de correlación entre los cuales se determina un mínimo a partir de una interpolación cúbica.

En este trabajo se ha utilizado el primero de ellos, el método de la L-curva.

Se han resumido las características principales de TUnfold necesarias para el desarrollo de este trabajo, pero puede consultarse [49] para obtener información más detallada y profundizar sobre la elección del parámetro de regularización, el tratamiento de las incertidumbres o la substracción del fondo entre otros.

Capítulo 5

Análisis del proceso $tW+t\bar{t}$

Una vez introducidos todos los preliminares necesarios para poder seguir la realización de este estudio de los procesos tW y $t\bar{t}$ de forma conjunta a NLO, en este capítulo se describe la metodología desarrollada y los resultados obtenidos.

5.1. Metodología

5.1.1. Implementación computacional

Todos los análisis y estudios que se han hecho en este trabajo se han programado en **C++** y **Python**, junto con **ROOT** que es un conjunto de librerías y programas construidos sobre C++ orientados esencialmente para la física de partículas por las facilidades que ofrece para los análisis de este área. El marco de trabajo (*framework*) que se ha usado está compuesto por dos herramientas creadas por el Grupo Experimental de Altas Energías de la Universidad de Oviedo llamados **AnalysisPAF** ([31]) y **PAF** (del inglés, *PROOF Analysis Framework*) ([32] y [35]). El primero se compone de código que estructura análisis en física de partículas y que, en general, puede dar cabida al estudio de un proceso o de más (como en este caso) y, el segundo, es un conjunto de librerías y programas que permiten construir un marco modular y ordenado con el que realizar análisis en física de partículas.

Para hacer todos estos análisis, se ha modificado el código específico del proceso tW ([51]) para adecuarlo al estudio de $tW+t\bar{t}$, aprovechando las ventajas de este marco colaborativo y que posiblemente sea útil para posteriores trabajos.

El código programado está pensado para ser ejecutado en los equipos del mismo grupo, así como en el *cluster* de servidores de computación que este tiene. Con este

fin, se ha empleado también **Bash** para controlar todas las ejecuciones de los múltiples análisis y estudios realizados. Así mismo, Python se ha usado para la obtención de los resultados de los análisis y para manejar todo el código. Las partes de este que eran compartidas, se ha usado el gestor de repositorios **git** y la plataforma empleada en todo momento estaba constituida de máquinas operando sistemas operativos GNU/Linux.

5.1.2. Datos y simulaciones

Los conjuntos de datos¹ que se utilizan en este estudio se dividen en dos grandes grupos que se presentarán a continuación. Estas bases de datos han pasado por varios procedimientos previos no triviales que ayuden a disminuir su gran tamaño.

▷ Datos experimentales de CMS.

En la subsección 2.3.4 se indicó que se van a considerar los canales leptónicos de desintegración del bosón W , por tanto, se van a considerar las muestras de CMS de 2016 que activaron el disparador de los canales dileptónicos que son todas las que pueden tener almacenadas interacciones de los tipos tW y $t\bar{t}$ a NLO. Estas son «SingleMuon», «SingleElec», «DoubleEG», «DoubleMuon» y «MuonEG». El valor de la luminosidad integrada considerado es 35.9 fb^{-1} .

▷ Simulaciones de Montecarlo.

La mejor manera de tratar estos procesos sería con una simulación que considerara el estado final de 4 leptones y dos b -jets según se dijo en la subsección 2.3.4, pero se están acabando de desarrollar y no se han podido incluir en este trabajo.

Por el contrario, sí están disponibles las simulaciones de Montecarlo del modelo Powheg para los procesos $t\bar{t}$ y tW con el tratamiento de la interferencia de las amplitudes a NLO entre ellos según DR y DS. De hecho, estas simulaciones se tienen tanto a nivel de detector (espacio *folded*, es decir, utiliza la información de los sucesos que han sido reconstruidos a partir de la medida de los estados finales) como a nivel de partícula (espacio *unfolded*, usa, además, la información disponible sobre la eficiencia del detector y otra información).

En la tabla 5.1 se muestran los tipos de procesos cuyas simulaciones de Montecarlo a nivel de detector se han incluido en el estudio y sus secciones eficaces.

¹Son archivos de ROOT que almacenan toda la información necesaria sobre cada colisión.

Tabla 5.1: Muestras de las simulaciones de Montecarlo a nivel de detector.

Proceso	Sección eficaz [pb]
$t\bar{t}$	831.76
$tW, \bar{t}W$ DR	35.85
$tW, \bar{t}W$ DS	35.85
WW	115
ZZ	16.523
WZ	47.13
Drell-Yan	28660
W y emisión de <i>jets</i>	61526.7
TTW	0.4062
TTZ	0.5297
TTG con emisión de <i>jets</i>	3.697

Los procesos de Drell-Yan son procesos de aniquilación entre dos *quarks* que dan lugar a un bosón W o γ que se desintegra en dos leptones

Destacar que gracias a los criterios de selección de la región de señal que se definen, las secciones eficaces de los procesos de fondo de la tabla 5.1 se reducen considerablemente; tanto es así, que el fondo será prácticamente despreciable.

5.1.3. Criterios de identificación de objetos, región de señal y extracción de señal

Se deben seleccionar todos aquellos sucesos que tengan un estado final compatible con los diagramas de Feynman de tW y $t\bar{t}$ a NLO. Para ello se implementa una función que filtre los sucesos que pertenezcan a la región de señal y guarde toda su información. Esta selección se hace para los datos, para las simulaciones a nivel de detector y para las simulaciones a nivel de partícula citadas en 5.1.2.

Esta primera parte se hace en lenguaje C++ ya que el proceso es bastante costoso computacionalmente y se necesita un entorno adecuado para ello. Conceptualmente, esta separado en dos partes que son la identificación de objetos y la de la región de señal (se definen a continuación); en la práctica, ambas se implementan

conjuntamente. Por último, debe limpiarse el fondo de los datos de CMS. Para ello se utilizan las simulaciones de Montecarlo de los procesos del fondo, es decir, que no son $t\bar{t}$ ni tW . En este estudio, el fondo es prácticamente despreciable, pero hay que sustraerlo igualmente.

PF hace una preselección de los candidatos a objetos para cada colisión. Sin embargo, es preciso considerar otros criterios de identificación de los objetos que van a ser identificados que sean menos conservadores sobre los mismos. Para establecer estas «definiciones» de partículas, se siguen las recomendaciones de POG (del inglés, *Physics Object Group*) que es el grupo de personas de la colaboración CMS que se dedican ex profeso a configurar tales identificaciones para cada tipo de objeto.

En particular, se citan aquí las características más importantes de los objetos que interesan en este estudio:

▷ **Muones:**

- momento transverso $p_T > 20$ GeV.
- pseudorapidez $|\eta| < 2.4$.

▷ **Electrones:**

- no estar identificado como muon.
- momento transverso $p_T > 20$ GeV.
- pseudorapidez $|\eta| < 2.4$.

▷ **Jets:**

- momento transverso $p_T > 30$ GeV.
- pseudorapidez $|\eta| < 2.4$.
- aislamiento en un cono de $\Delta(R) \leq 0.4$, es decir, que no haya objetos identificados como leptones o muones.

Los criterios de identificación de la región de señal son:

- ▷ Dos y solo dos leptones $\{\ell_1, \ell_2\}$ (siendo $p_T(\ell_1) > p_T(\ell_2)$) tales que:
- sean de carga opuesta;
 - pertenezcan a los canales ee , $\mu\mu$ o $e\mu$;
 - la masa invariante sea $m(\ell_1, \ell_2) > 20$ GeV. Además, si es un suceso de los canales ee o $\mu\mu$, $|m(\ell_1, \ell_2) - m_Z| > 15$ GeV;
 - el momento transverso cumpla $p_T(\ell_1) > 25$ GeV;
 - si se trata del canal ee , entonces ($|\eta(\ell)| < 1.4442$ || $|\eta(\ell)| > 1.566$) y
 - la energía transversa faltante satisface $MET > 20$ GeV si es un suceso de los canales ee o $\mu\mu$.

- ▷ Dos *jets* $\{j_1, j_2\}$ (siendo $p_T(j_1) > p_T(j_2)$) tales que:
 - sean *b-jets*;
 - $\nexists j_3$ tal que $p_T(j_3) > 20$ GeV.

5.1.4. Observables físicos analizados

Es conveniente definir explícitamente los observables físicos respecto a los cuales se va a calcular la sección eficaz diferencial de los procesos $t\bar{t}$ y tW tratados de manera conjunta.

▷ Momento transverso del *leading*² leptón

Para cada colisión perteneciente a la región de señal, se consideran los objetos identificados como leptones (electrón o muon) y, entre ellos, se elige el de mayor momento transverso.

Este observable es interesante porque muestra una parte importante de la cinemática del suceso.

▷ Momento transverso del *leading*² *b-jet*

Para cada colisión perteneciente a la región de señal, se consideran los objetos identificados como *b-jets* y, entre ellos, se elige el de mayor momento transverso.

Este observable es interesante porque muestra una parte importante de la cinemática del suceso.

▷ Masa minimax

Este observable es especialmente importante porque va a dar otra manera de poner a prueba las interferencias entre los procesos $t\bar{t}$ y tW a NLO. Se sabe que el estado final de ambos procesos está caracterizado por dos leptones de carga opuesta y dos neutrinos (originados en los decaimientos de los bosones W por los canales leptónicos) y dos *b-jets*. En este análisis, se utilizan los leptones cargados como una aproximación del bosón W y se mide la sección eficaz diferencial respecto a una función de las masas invariantes de los pares (leptón, *b-jet*), $m(W, b) \approx m(\ell, b)$. Existe cierta ambigüedad respecto a como definir esta masa y, en este trabajo, se toma la función definida en [8] que es:

$$\mathbf{m}_{b\ell}^{\text{minimax}} := \min\{\max\{\mathbf{m}(\mathbf{b}_1, \ell_1), \mathbf{m}(\mathbf{b}_2, \ell_2)\}, \max\{\mathbf{m}(\mathbf{b}_1, \ell_2), \mathbf{m}(\mathbf{b}_2, \ell_1)\}\}$$

²El calificativo *leading* hace referencia a la partícula con mayor momento transverso.

donde b_i y ℓ_i con $i \in \{1, 2\}$ representan los dos b -jets y los dos leptones respectivamente. Se hará referencia a ella como **masa minimax** y su valor resulta ser un discriminante entre ambos procesos. Teniendo como referencia los diagramas de Feynman de la figura 2.3, se recuerda que:

- en la producción $t\bar{t}$, ambos pares $\{\ell, b\}$ vienen de la desintegración de un *quark* $t \Rightarrow m(b_i, \ell_j) < m_t \forall i, j \in \{1, 2\} \Rightarrow m_{bl}^{minimax} < m_t$.
- en la producción tW , solo un par $\{\ell, b\}$ viene de la desintegración de un *quark* $t \Rightarrow$ puede existir $\{\ell_i, b_j\}$ tal que $m(b_i, \ell_j) > m_t \Rightarrow m_{bl}^{minimax}$ puede ser mayor, menor o igual que m_t .

En la figura 5.1 se puede ver a la izquierda una estimación de las distribuciones de la masa minimax para ambos procesos teniendo en cuenta estas deducciones. Da una idea de la forma que tendrá el histograma de la sección eficaz diferencial respecto a este observable físico. De hecho, en la imagen de la derecha se muestra la distribución normalizada de las simulaciones de Montecarlo disponibles a nivel de partícula, donde efectivamente se comprueba la forma de las distribuciones.

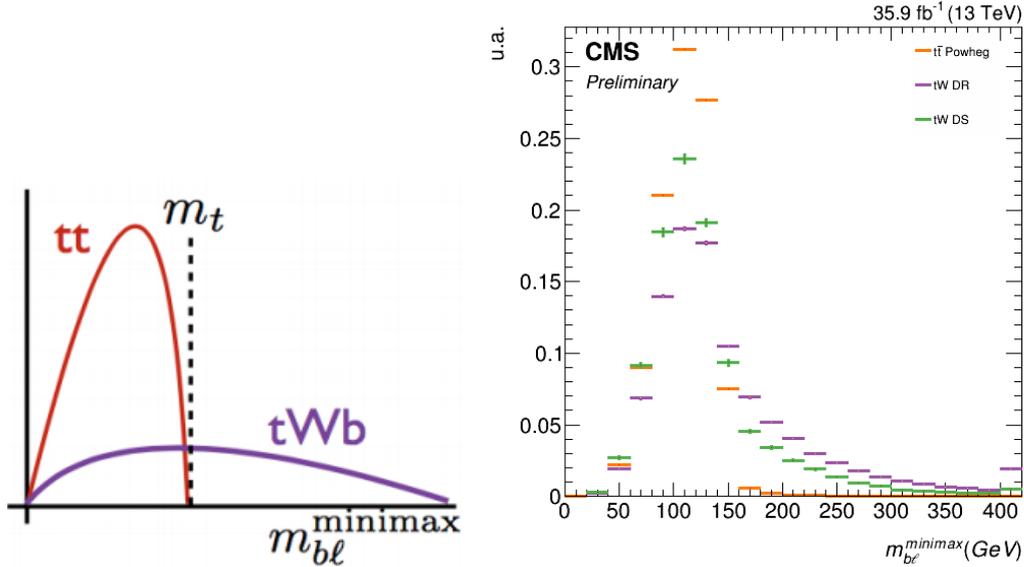


Figura 5.1: Izquierda: estimación de la distribución la masa minimax ([44]). Derecha: distribución normalizada de la masa minimax con las simulaciones de Montecarlo de CMS a nivel de partícula.

5.1.5. Método de *unfolding*

El método de *unfolding* desarrollado para este estudio es el del algoritmo TUnfold descrito en la sección 4.6 con pequeñas variaciones. En todo caso, solamente se han

considerado incertidumbres estadísticas, es decir, $n \pm \sqrt{n}$ para cada intervalo. Sigue los siguientes pasos:

1. Intervalado³ inicial

Se va a añadir una restricción más a las del descritas en el algoritmo ya que imponer una relación entre el número de intervalos de [1 *unfolded* : 2 *folded*]. Así, los grados de libertad son iguales al número de parámetros libres.

2. Sección eficaz diferencial en el espacio *folded*

El histograma «experimental» se encuentra en el espacio *folded* y en él se contrastan las simulaciones a nivel de detector de los procesos tW y $t\bar{t}$ considerados de forma conjunta con los datos sin fondo.

3. Obtención de la matriz de respuesta

Se definen los siguientes contajes de las variables anteriores ya que serán de utilidad a la hora de hacer el procedimiento de *unfolding*:

s_{ij} : número de sucesos cuyo valor a nivel de detector cae en el intervalo i y a nivel de partículas, en el intervalo j

s_j : número total de sucesos simulados en el intervalo j

r_i : número total de sucesos reconstruidos en el intervalo j

Los elementos de la matriz de respuesta para cada observable físico se obtienen como $R_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_i}$. Además, se añaden las incertidumbres estadísticas para cada valor.

4. Elección del lagrangiano

Antes de proceder con el *unfolding* propiamente dicho, se debe tomar la decisión de qué términos se van a incluir en el lagrangiano en cada caso. Para ello, se establece un criterio sobre cuándo comienza a ser necesario considerar la restricción de área y/o la regularización.

Comenzando con la restricción de área, se recuerda que este término limita las incertidumbres que puedan introducirse por considerar distribuciones normales cuando se tienen pocos datos (intervalos poco poblados). El criterio que se ha seguido es considerar la restricción de área cuando existe al menos algún intervalo del espacio *folded* con un número de sucesos inferior a orden $\sim 10^2$.

Respecto a la regularización, se recuerda que este factor resolvía problemas de suavidad en las distribuciones, que ocurren cuando la matriz de respuesta

³En inglés, *binning*, vector de valores numéricos que fijan los intervalos del histograma.

no es muy diagonal y hay muchas migraciones de sucesos. En consecuencia, su número de condición⁴ es elevado, mayor de orden 10, 10^2 . En el caso de considerar necesaria la regularización, se obtiene el valor óptimo del parámetro de regularización, τ , según el método de la L-curva.

5. Sección eficaz diferencial en el espacio *unfolded*

El histograma «real» se encuentra en el espacio *unfolded* y en él se contrastan las simulaciones a nivel de partícula con los datos.

Una vez determinadas las secciones eficaces diferenciales de los datos en el espacio *folded*, la matriz de respuesta y el parámetro óptimo, λ^* ; se calculan las secciones eficaces diferenciales en el espacio *unfolded* que optimizan el lagrangiano, m^* , y sus incertidumbres (propagación de las incertidumbres estadísticas de la matriz y de los datos).

6. Estabilidad y pureza

Una posible solución del problema de *unfolding*, pasa por invertir la matriz R como se vio en la sección 4.3. Es razonable pensar que la fiabilidad de esta solución va a depender de las características de R , en particular, de cuan invertible es numéricamente (cuanto más diagonal, mejor). Se definen las siguientes magnitudes con el propósito de cuantificar la diagonabilidad de R :

$$E_j := \frac{\sum_{i=1}^N s_{ij}}{s_j} : \text{estabilidad del intervalo } j \text{ de la distribución «real»}$$

$$P_i := \frac{\sum_{j=1}^M s_{ij}}{r_i} : \text{pureza del intervalo } i \text{ de la distribución «experimental»}$$

En esencia, la estabilidad estima la cantidad de sucesos simulados que son reconstruidos como señal respecto al total de los sucesos simulados (para cada intervalo) y la pureza estima la cantidad de sucesos de señal reconstruidos respecto al total de sucesos reconstruidos (para cada intervalo). El objetivo será maximizar en paralelo ambas magnitudes al optimizar el intervalado de ambos espacios. De esta manera, se establece un procedimiento que permite tomar la decisión de si tratar de optimizar los intervalados y repetir todo el proceso o dar el resultado por definitivo.

⁴El número de condición cuantifica cuán sensible es a cambios en los valores de las entradas. Sea A una matriz, se define su número de condición $\mathcal{K} := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ siendo $\|\cdot\|$ una norma matricial. Esta definición se puede generalizar para matrices no cuadradas.

5.2. Resultados

5.2.1. Comparaciones datos-simulaciones

Una vez seleccionados los sucesos, el objetivo de esta primera parte de tratamiento de datos es comprobar que las simulaciones de Montecarlo a nivel de detector y los datos experimentales son coherentes en cada observable físico estudiado en el rango de energías donde se han recogido los datos del detector. Para ello se leen los datos seleccionados y se les resta el fondo y se contrastan con las simulaciones de Montecarlo. El resultado se representa con el intervalado optimizado para cada observable físico según se explica en la subsección 5.1.5 gracias a la estabilidad y la pureza.

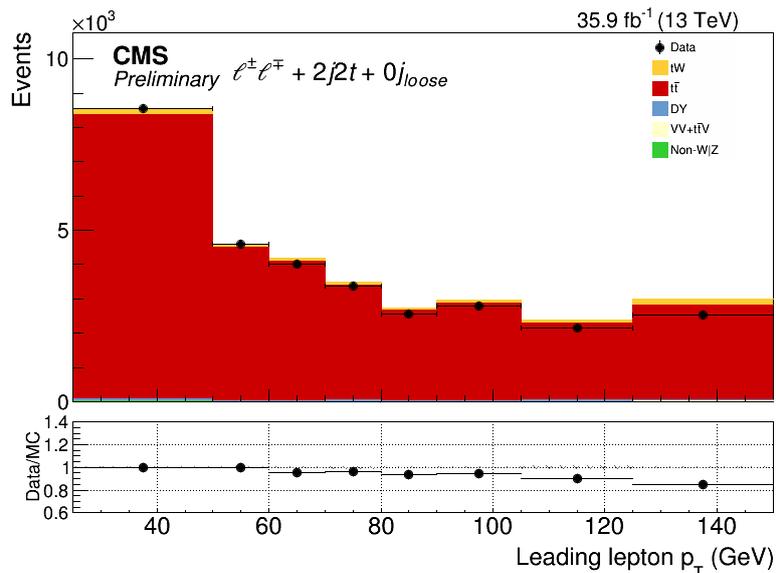


Figura 5.2: Histograma en número de sucesos de los observables momento transverso del *leading* leptón.

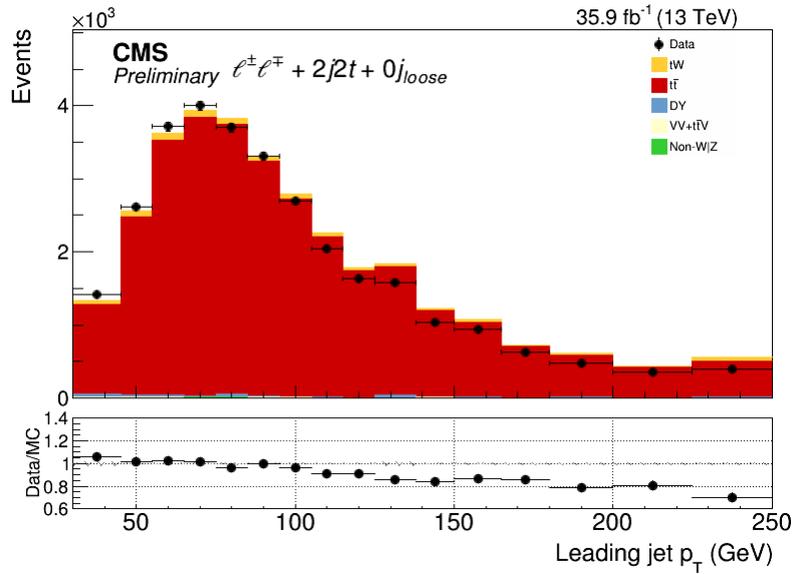


Figura 5.3: Histograma en número de sucesos de los observables momento transverso del *leading* b-jet.

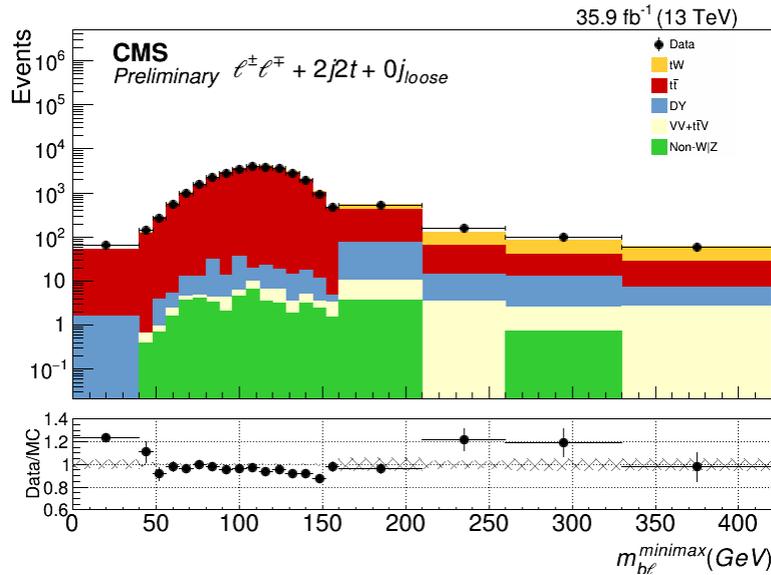


Figura 5.4: Histograma en número de sucesos del observable masa minimax.

Se puede apreciar que la concordancia entre los datos y las simulaciones a nivel de detector es bastante buena, aumentando la discrepancia entre ambos en las colas de la distribución, donde hay menos estadística y los modelos se desajustan un poco más; aunque hay que tener en cuenta que no se están teniendo en cuenta las incertidumbres estadísticas. De hecho, aparece una pendiente en el ratio de los tres histogramas que es un efecto conocido que tiene relación con un problema en la modelización del *quark top*.

Los sucesos de tW del histograma de la masa minimax se ven acumulados a la derecha de la distribución como era de esperar porque los sucesos de la izquierda son prácticamente insignificantes comparados con los que aporta el proceso $t\bar{t}$.

En concordancia con lo visto en la subsección 5.1.5 sobre la restricción de área en el método de *unfolding*, como en todos los intervalos se tienen al menos del orden de 10^2 sucesos, no será necesario aplicarlo en ninguno de estos tres observables físicos.

5.2.2. Sección eficaz diferencial a nivel de detector

A continuación, se quiere contrastar la sección eficaz diferencial respecto a los observables físicos seleccionados en el espacio *folded*, es decir, entre los datos y las simulaciones a nivel de detector. Las predicciones que se incluyen son las del *software* Powheg + Pythia8 para los procesos $t\bar{t}$ y tW independientes con dos procedimientos distintos para tratar la interferencia de sus amplitudes a NLO que son DS y DR. El intervalado considerado es el segundo de los de la subsección 5.2.1 para cada observable. Se van a considerar dos histogramas diferentes, con dos tipos de datos experimentales de CMS de 2016 a los que se les ha sustraído el fondo estimado en las simulaciones (procesos que no son $t\bar{t}$ o tW) teniendo en cuenta sus secciones eficaces de la tabla 5.1.

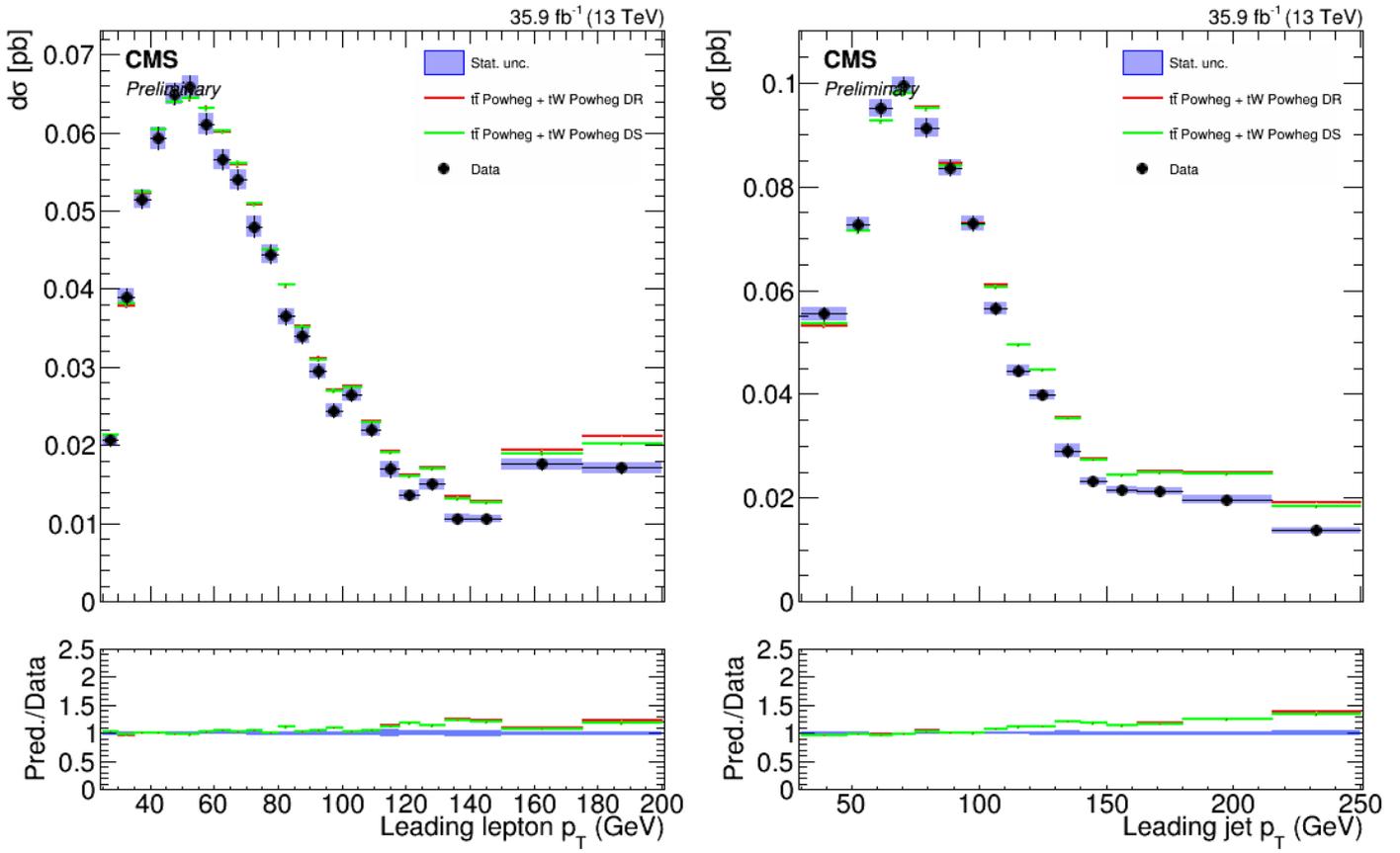


Figura 5.5: Sección eficaz diferencial respecto del observable momento transverso del *leading* leptón (izquierda) y del *leading* b-jet (derecha).

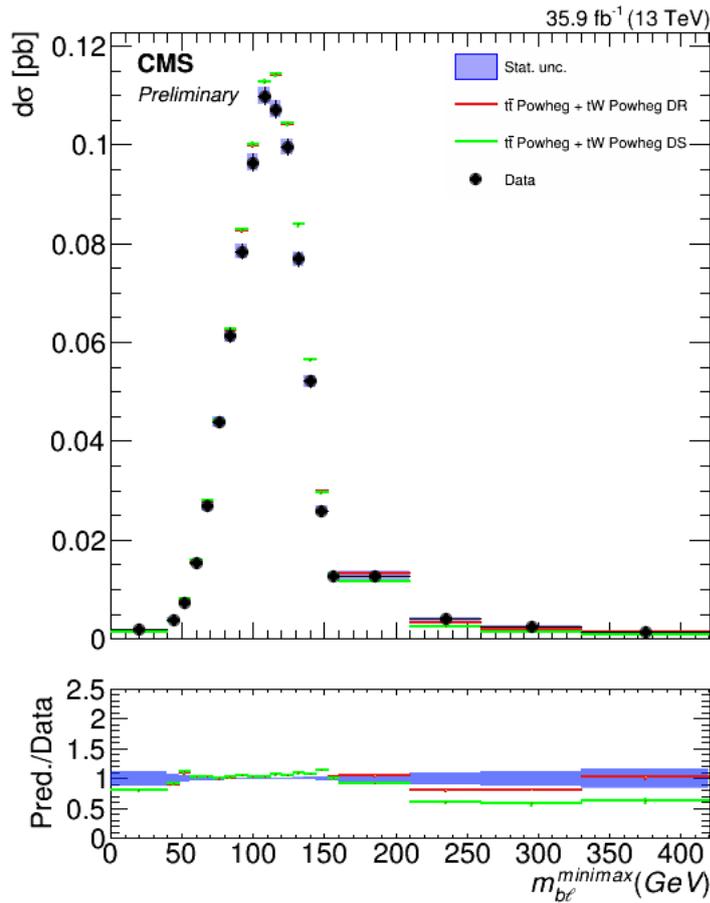


Figura 5.6: Sección eficaz diferencial respecto del observable masa minimax.

5.2.3. Sección eficaz diferencial a nivel de partícula

Como se vio en la subsección 5.1.5, la obtención de estos histogramas finales no es directa y requieren de varios pasos previos.

1. Estabilidad y pureza

Se obtiene el valor de la estabilidad y la pureza para cada intervalo del espacio *unfolded* y *folded* respectivamente. Aquí se muestran sus gráficas para el último intervalado, el de los resultados. Es importante que la optimización sea de ambas magnitudes al mismo tiempo y sus valores sean más o menos uniformes en el rango de energías en el que se miden los datos para que el resultado sea fiable.

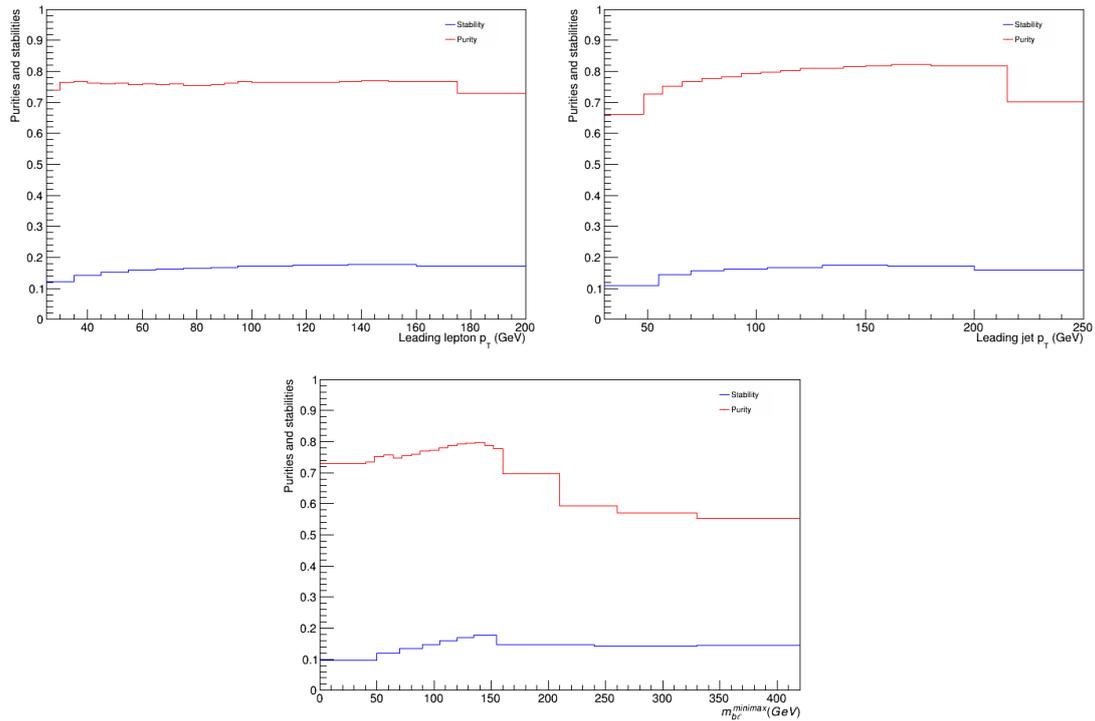


Figura 5.7: Estabilidad y pureza de los observables momento transversal del *leading* leptón (arriba izquierda) y del *leading* b-jet (arriba derecha) y masa minimax (abajo).

2. Matrices de respuesta

Se escribe la matriz con las proporciones de la definición dada en la subsección 5.1.5 y se calcula su número de condición que va a ayudar a tomar la decisión de si hacer regularización o no.

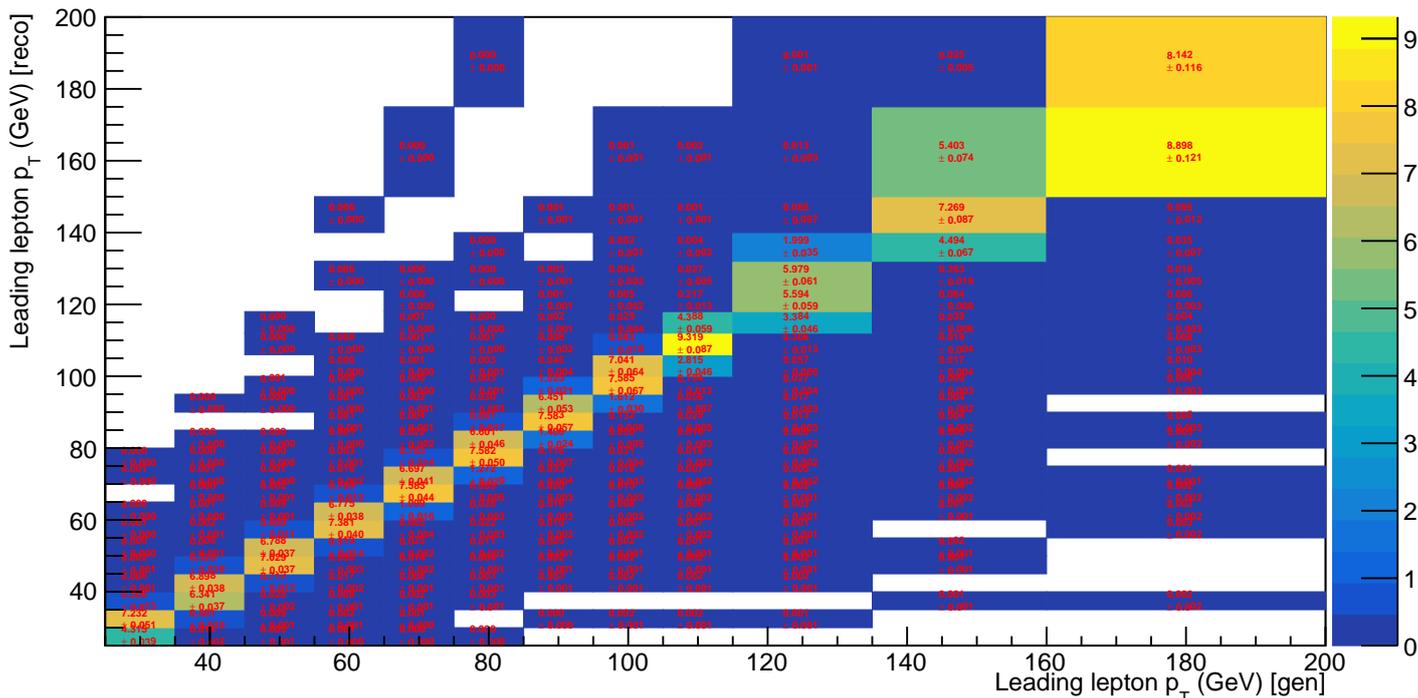


Figura 5.8: Matriz de respuesta del observable momento transverso del *leading* leptón.

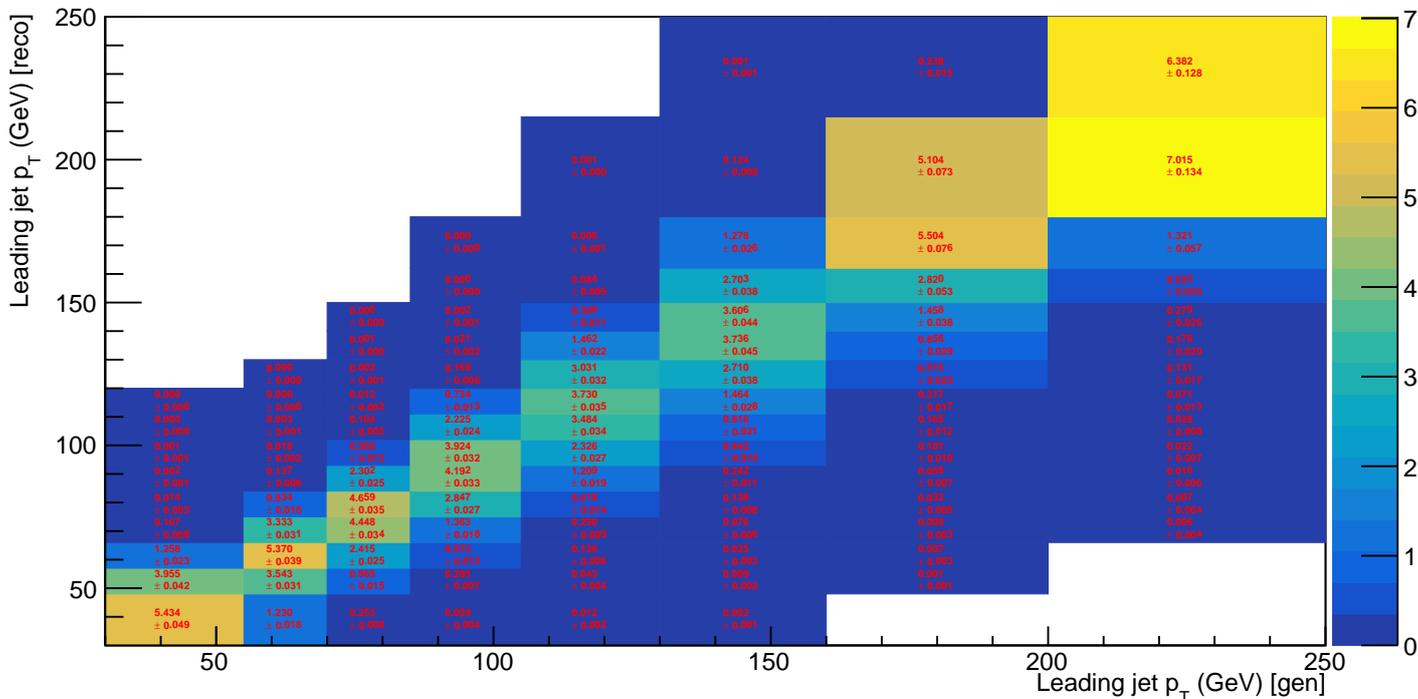


Figura 5.9: Matriz de respuesta del observable momento transverso del *leading* b-jet.

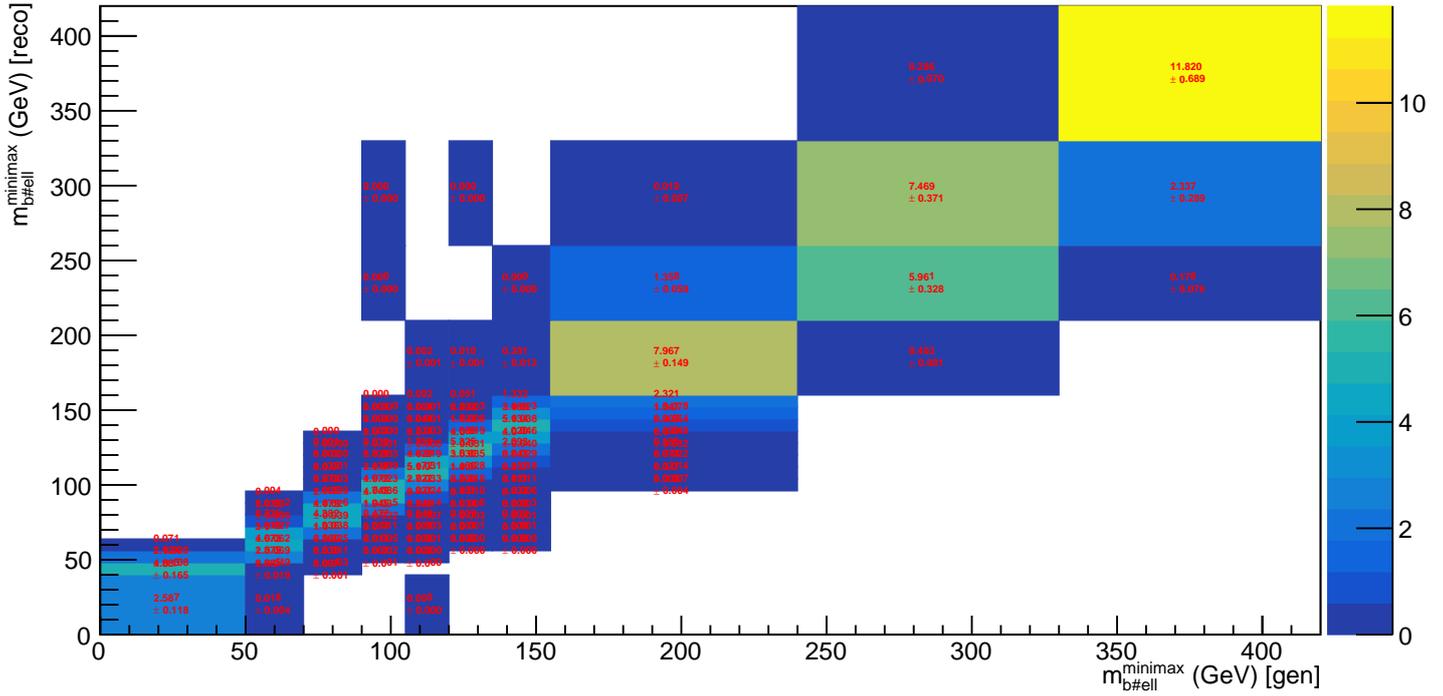


Figura 5.10: Matriz de respuesta del observable masa minimax.

Vistos los resultados de la tabla 5.2 y en concordancia con lo que se dijo en la subsección 5.1.5, no se considerará necesario aplicar *unfolding* regularizado para ninguno de estos tres observables físicos con estos intervalados porque los números de condición son suficientemente pequeños y las matrices suficientemente diagonales para tener resultados fiables del *unfolding* por inversión directa de la matriz.

Tabla 5.2: Números de condición de las matrices de respuesta.

Observable físico	$\mathcal{K}(R)$
Momento transverso del <i>leading</i> b-jet	5.2244
Momento transverso del <i>leading</i> leptón	1.7076
Masa minimax	4.2

Finalmente, se ha podido hacer el *unfolding* más adecuado para cada observable físico sobre los datos y se ha contrastado lo obtenido con las simulaciones disponibles de Powheg+Pythia8 a nivel de partícula para ambos procesos $t\bar{t}$ y tW independientes, tratando la interferencia a NLO con los modelos DR y DS.

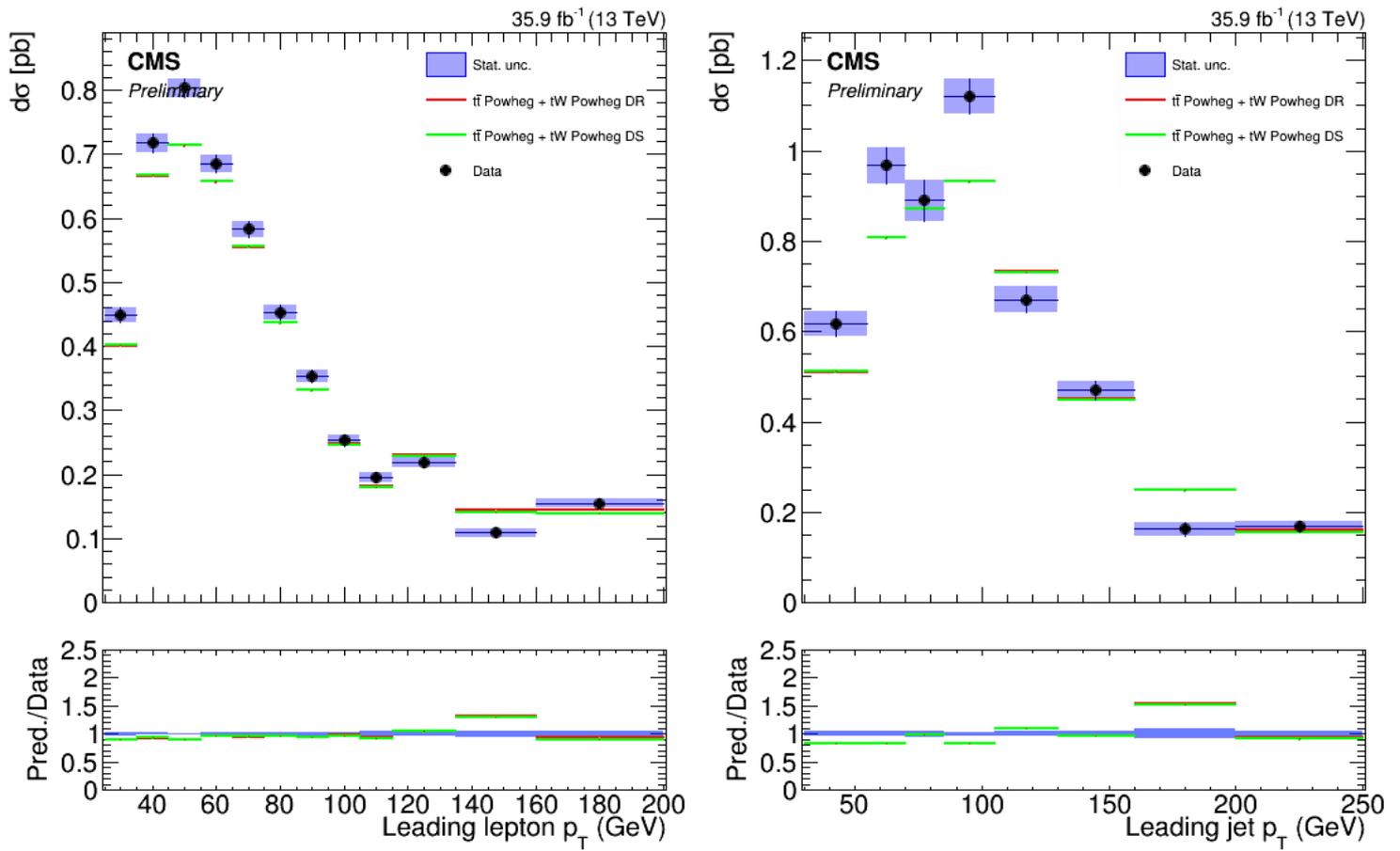


Figura 5.11: Sección eficaz diferencial a nivel de partícula respecto de los observable momento transverso del *leading* leptón (izquierda) y *leading* b-jet (derecha).

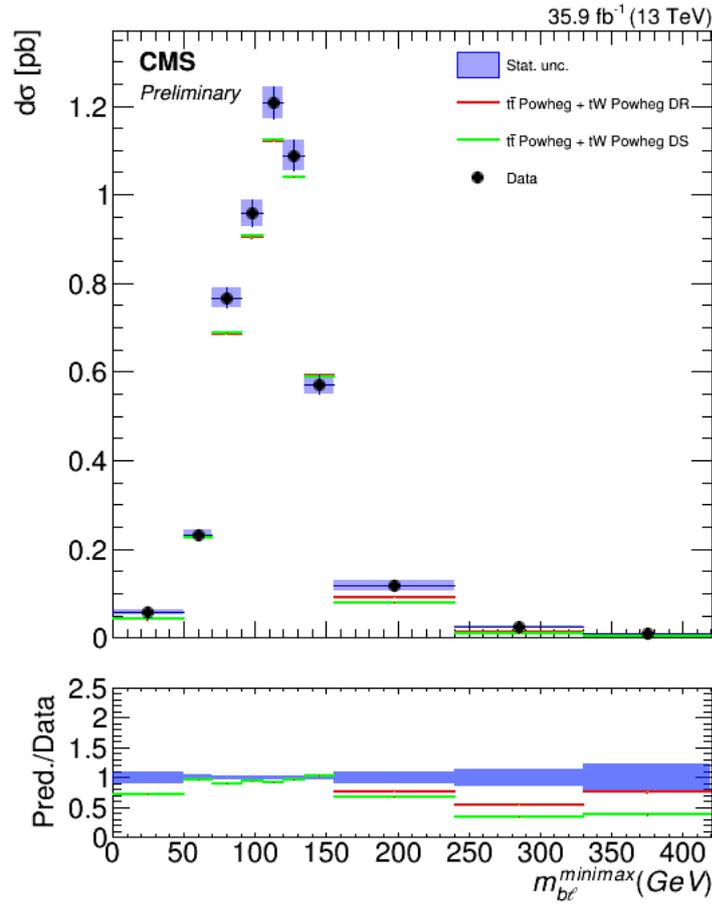


Figura 5.12: Sección eficaz diferencial a nivel de partícula respecto del observable momento transverso del *leading* b-*jet*.

Se puede apreciar en las figuras 5.12 y 5.11 que aunque no hay acuerdo entre los datos y los modelos, esto es esperable porque no se han considerado incertidumbres sistemáticas que sin dudar reducirían las discrepancias.

Se han hecho unas comprobaciones sobre el método y se han encontrado varios aspectos técnicos que todavía no están resueltos totalmente por lo que habría que profundizar en ellos.

Conclusiones finales

Se han expuesto los resultados obtenidos hasta la fecha de la medida de la sección eficaz diferencial de los procesos de producción individual de *quarks top* junto con un bosón W llamado tW y de producción de pares *top-antitop* llamado $t\bar{t}$ de manera conjunta, tomándose los datos del detector CMS de LHC de 2016 a $\sqrt{s} = 13$ TeV.

Este análisis se ha llevado a cabo en la región de señal de estado final cuatro leptones (dos cargados de cargas opuestas de los canales ee $e\mu$ $\mu\mu$ y dos neutrinos) y dos *b-jets* entre otras restricciones. Las amplitudes a NLO de estos dos procesos interfieren ya que algunos de sus estados finales son idénticos.

Las simulaciones disponibles para este estudio a día de hoy son las de los procesos $t\bar{t}$ y tW con el modelo Powheg+Pythia8 de manera independiente; tratando la interferencia con DS o DR. Se han salvado las complicaciones causadas por la gran cantidad de estadística aportada por las simulaciones del proceso $t\bar{t}$ que a veces saturaban la memoria de los dispositivos computacionales, las muestras resultaban corruptas y los resultados inadecuados.

Las secciones eficaces diferenciales respecto a los observables físicos seleccionados de los datos tienden a ajustarse en forma a las predicciones de los modelos considerados y las discrepancias entre las barras de incertidumbre de los datos y las predicciones son de menos de 0.15 pb en todo caso. En este sentido, solo se han considerado incertidumbres estadísticas y sería conveniente introducir otras incertidumbres sistemáticas, como por ejemplo las características del etiquetado de los *b-jets*, que claramente reducirán las discrepancias entre los datos y las simulaciones notablemente. Por ello, no se puede concluir que ninguno de los dos tratamientos de la interferencia de la muestra tW (DR o DS) sea más correcto que el otro. Cabe destacar que parte del desajuste puede deberse al problema conocido en la modelización del *quark top* citado en los resultados (pendiente en el ratio).

En general, implementar modelos de simulaciones es una tarea muy compleja que requiere de mucho tiempo y normalmente bastantes personas para construirse. En particular, se está desarrollando un modelo de estado final 2 *b-jets* y 4 leptones que no haga diferencia entre los procesos a NLO, pero todavía no está listo y por eso no se ha incluido en este trabajo.

Este análisis del proceso $tW+t\bar{t}$ es una excelente base para continuar estudiando estos procesos a NLO y seguramente el análisis se afiance en un futuro cercano por su relevancia para muchos análisis de la colaboración CMS.

Referencias y bibliografía consultada

- [1] A.D.Martin et al., ‘Parton distributions for the LHC’. En: *Eur. Phys. J. C* (2009). doi: 10.1140/epjc/s10052-009-1072-5. arXiv: 0901.0002
- [2] A.D.Martin et al. ‘Uncertainties on α_S in global PDF analyses and implications for predicted hadronic cross sections’. En: *Eur.Phys.J.C64:653-680,2009* (2009). doi: 10.1140/epjc/s10052-009-1164-2. arXiv: 0905.3531
- [3] A.M.Sirunyan et al., ‘Particle-flow reconstruction and global event description with the CMS detector’. En: *Journal of Instrumentation (JINST)*, v.12, n^o10 (2017). arXiv: 1706.04965 doi: 10.1088/1748-0221/12/10/P10003
- [4] A.N.Tikhonov, ‘On the solution of improperly posed problems and the method of regularization’. En: *Sov. Math.* 5 (1963), pág 1035.
- [5] A.N.Tikhonov and V.Ya.Arsenin, ‘Solutions of Ill-Posed Problems’. En: *John Wiley, New York* (1977).
- [6] Andreas Hocker and Vakhtang Kartvelishvili, ‘SVD approach to data unfolding’. En: *Nucl. Instrum. Methods* A312 (1996), pág. 469.
- [7] ATLAS Collaboration, ‘Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC’. arXiv: 1207.7214
- [8] ATLAS Collaboration, ‘Probing the quantum interference between singly and doubly resonant top-quark production in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector’. arXiv: 1806.04667
- [9] Byron P.Roe, ‘Probability and Statistics in Experimental Physics’. En: *Springer, New York* (1992).
- [10] C.E.Shannon and W. Weaver, ‘The Mathematical Theory of Communication’. En: *University of Illinois Press, Urbana* (1949).
- [11] CDF Collaboration, ‘Observation of Top Quark Production in p- \bar{p} Collisions’. En: *Phys. Rev. Lett.* 74: 2626-2631 (1995). doi: 10.1103/PhysRevLett.74.2626. arXiv: hep-ex/9503002
- [12] CDF Collaboration and D0 Collaboration, ‘Observation of s-channel production of single top quarks at the Tevatron’. En: *Phys. Rev. Lett.* 112, 231803 (2014) . doi: 10.1103/PhysRevLett.112.231803. arXiv: 1402.5126
- [13] CMS Collaboration, ‘CMS Physics Technical Design Report, Volume II: Physics Performance’. En: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 34(6):995, June 2007. ISSN 0954-3899. doi: 10.1088/0954-3899/34/6/S01

- [14] CMS Collaboration, ‘Measurement of the production cross section for single top quarks in association with W bosons in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV’. In: (2018). arXiv: 1805.07399
- [15] CMS Collaboration, ‘Measurement of the t-channel single-top quark production cross section at 13 TeV with the CMS detector’. En: (2016). arXiv: 1611.08443.
- [16] CMS Collaboration, ‘Measurement of the $t\bar{t}$ production cross section using events in the $e\mu$ final state in p-p collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV’. En: *EPJC* (2016). doi: 10.1140/epjc/s10052-017-4718-8. arXiv: 1611.04040
- [17] CMS Collaboration, ‘Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC’. doi: 10.1016/j.physletb.2012.08.021 arXiv: 1207.7235v2
- [18] CMS Collaboration, ‘Particle-flow reconstruction and global event description with the CMS detector’. arXiv: 1706.04965v2
- [19] CMS Experiment, ‘Jet at CMS and the determination of their energy scale’. Disponible en: <http://cms.web.cern.ch/news/jets-cms-and-determination-their-energy-scale>
- [20] CMS Experiment, ‘New CMS results at Moriond (Electroweak) 2013’, disponible en <http://cms.web.cern.ch/news/new-cms-results-moriond-electroweak-2013>
- [21] CERN, ‘CMS Luminosity - Public Results’, disponible en https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/CMSPublic/LumiPublicResults#2018_proton_proton_13_TeV_collis
- [22] D.L.Phillips, ‘A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind’, *J. ACM* 9 (1962), pág. 84.
- [23] D0 Collaboration. ‘Search for High Mass Top Quark Production in p- \bar{p} Collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV’. En: *Phys. Rev. Lett.* 74 (1994), pp. 2422-2426. doi: 10.1103/PhysRevLett.74.2422. arXiv: hep-ex/9411001
- [24] E.T.Jaynes, ‘Prior probabilities’. En: *IEEE Trans. Syst. Sci. Cybern.* SSC- 4 (1968), pág. 227.
- [25] F.Beaudet, ‘The CMS Particle Flow Algorithm’. arXiv: 1401.8155v1
- [26] F.Villatoro et al, ‘CMS no observa el efecto magnético quirral sugerido por STAR y ALICE’. En: *La Ciencia de la Mula Francis*. Disponible en <http://francis.naukas.com/2017/06/21/cms-noobserva-efecto-magnetico-quiral-sugerido-star-alice/>
- [27] F.Villatoro et al, ‘Calculan la diferencia de masa entre protón y neutrón’. En: *La Ciencia de la Mula Francis*. Disponible en <https://francis.naukas.com/2015/04/09/calculan-la-diferencia-de-masa-entre-proton-y-neutron/>
- [28] G.Wahba, ‘Smoothing and ill-posed problems. En: ‘Solution Methods for Integral Equations’, *Michael Goldberg* (ed.), *Plenum Press, New York* (1979).
- [29] G.Zech, ‘Comparing statistical data to Monte Carlo simulation- parameter fitting and unfolding’. En: DESY 95-113 (1995).
- [30] Glen Cowan, ‘Statistical Data Analysis’. En: *Oxford University Press Inc., New York* (1998).
- [31] Grupo Experimental de Altas Energías de la Universidad de Oviedo, Repositorio «AnalysisPAF» disponible en <https://github.com/Oviedo-PAF/AnalysisPAF>.

- [32] Grupo Experimental de Altas Energías de la Universidad de Oviedo, Página web de PAF disponible en <http://www.hep.uniovi.es/PAF/>.
- [33] Hung-Liang Lai et al. ‘New parton distributions for collider physics’. En: *Phys. Rev. D* (2010). doi: 10.1103/PhysRevD.82.074024. arXiv: 1007.2241
- [34] J.Alwall et al. JHEP 07 (2014) 079. arXiv: 1405.0301
- [35] J.Delgado, E. F. del Castillo, I. González, y A. Rodríguez, ‘PROOF Analysis Framework (PAF)’. En *J. Phys.: Conf. Ser.* (2015).
- [36] M.Aliev et al. ‘-HATHOR-Hadronic Top and Heavy quarks cross section calculator’. En: *Comput.Phys.Commun.182:1034-1046,2011* (2010). doi: 10.1016/j.cpc.2010.12.040. arXiv: 1007.1327
- [37] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* 98, 030001 (2018). Disponible en :<http://pdg.lbl.gov/index.html>
- [38] Michael Schmelling, ‘The method of reduced cross-entropy. A general approach to unfold probability distributions’. En: *Nucl. Instrum. Methods* A340 (1994), pág.400.
- [39] Michal Czakon and Alexander Mitov. ‘Top++: a program for the calculation of the top-pair cross-section at hadron colliders’. En: *Computer Physics Communications* 185 (2014) 2930 (2011). doi: 10.1016/j.cpc.2014.06.021. arXiv: 1112.5675
- [40] Michiel Botje et al. ‘The PDF4LHC Working Group Interim Recommendations’. En: (2011). arXiv: 1101.0538.
- [41] Kikael Kuusela, ‘Introduction to Unfolding in High Energy Physics’. En: *Advanced Scientific Computing Workshop, ETH Zurich* (2014), disponible en <https://indico.phys.ethz.ch/event/5/contributions/52/attachments/35/47/slides.pdf>
- [42] P.Govoni, ‘Data analysis techniques’, disponible en http://thwww.if.uj.edu.pl/~erichter/dydaktyka/Dydaktyka2013/LAB-2013/HCPS_2011_govoni_1.pdf
- [43] P.Kant et al. ‘HATHOR for single top-quark production: Updated predictions and uncertainty estimates for single top-quark production in hadronic collisions’. En: *Comput.Phys.Commun. 191* (2015) 74-89 (2014). doi: 10.1016/j.cpc.2015.02.001. arXiv: 1406.4403
- [44] R.Moles-Valls, ‘Single-top-quark production in standar modes[ATLAS+CMS]’. En: *ATLAS and CMS collaboration* (2018). Disponible en: https://indico.cern.ch/event/690229/contributions/2935112/attachments/1717486/2771391/Moles_Top2018.pdf
- [45] S. Alioli, P. Nason, C. Oleari and E. Re, JHEP 1006 (2010) 043. arXiv: 1002.2581
- [46] Richard D.Ball et al. ‘Parton distributions with LHC data’. En: *Nuclear Physics B* (2012). doi: 10.1016/j.nuclphysb.2012.10.003. arXiv: 1207.1303
- [47] S.Höche, ‘Introduction to parton-shower event generators’. arXiv: 1411.4085
- [48] S.Kullback, ‘Information Theory and Statistics’. En: *John Wiley, New York* (1964).
- [49] Stefan Schmitt, ‘TUnfold, an algorithm for correcting migration effects in high energy physics’. En: *DESSY, NotkestraBe* 85, 22607 Hamburg. arXiv: 1205.6201
- [50] V.Blobel, ‘Unfolding methods in high energy physics experiments’. En: *Proceedings of the 1984 CERN School of Computing, CERN* 85-09 (1985).

- [51] V.Rodríguez Bouza, 'Studies of the tW production process in p-p collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV at the CMS detector.
- [52] Victor Blacus, 'File:Running coupling constants.svg' disponible en https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Running_coupling_constants.svg

Índice temático

- cluster* de energía, 8
- hardware*, 27
- jet* de partículas, 7
 - b-jets, 8
 - etiquetado del sabor, 8
- software*, 27
 - NLO, 32
 - Geant4, 33
 - fast-sim*, 33
 - full-sim*, 33
 - Powheg, 32
 - Pythia8, 33
- trigger path*, 27
- underlying event*, 27
- unfolding*, 35
 - coeficiente de correlación, 58
 - distribución de referencia, 51
 - factores de corrección, 46
 - función de regularización, 48
 - función de resolución , 40
 - función de Tikhonov, 49
 - función respuesta, 40
 - L-curva, 58
 - curvatura, 58
 - matriz de respuesta, 40
 - parámetro de regularización, 48
 - regularización, 48
- acelerador de partículas, 19
 - LHC, 19
 - Tevatrón, 13
- aislamiento, 29
- algoritmo
 - PF*, 28
 - CSVv2, 30
 - TUnfold, 54
- apilamiento, 27
- bosón, 5
 - bosón de Higgs, 6
 - campo de Higgs, 6
 - mecanismo de Higgs, 6
 - fotón, 6
 - gluon, 6
 - Z y W, 6
- C++, 59, 61
- canal-s, 14
- canal-t, 14
- canal-tW, 15
- centro de masas, 14
- colisión principal, 26
- covarianza, 39
- detector
 - ALICE, 20
 - ATLAS, 20

- CMS, 20
 - detector de muones, 23
 - detector de trazas, 23
 - ECAL, 23
 - HCAL, 23
 - solenoides, 22
- LHCb, 20
- disparador, 27
- dispersión principal, 27
- DR, 18
- DS, 18
- eficiencia, 37
- eficiente, 43
- entropía, 50
 - de cruce, 51
 - de Shannon, 50
 - de Shannon-Jaynes, 51
- estabilidad, 66
- estable, 4
- exactitud, 36
- fermión, 4
 - quark*, 5
 - leptón, 4
 - número leptónico, 4
- fondo, 12
- hadrón, 6
 - quark* de mar, 6
 - quark* de valencia, 6
 - barión, 7
 - mesón, 6
 - partón, 32
- haz de partículas, 20
- insesgado, 43
- interacción
 - débil, 10
 - electromagnética, 9
 - carga electromagnética, 9
 - fuerte, 9
 - carga de color, 5
 - confinamiento de color, 5
 - libertad asintótica, 9
 - gravitatoria, 8
- intervalado, 65
- lagrangiano, 3
- LO, 14
- luminosidad
 - instantánea, 20
 - integrada, 21
 - luminosidad integrada
 - barn inverso, 21
- masa relativista, 25
- matriz de covarianzas, 39
- matriz de dispersión, 11
 - amplitud de dispersión, 11
- media o esperanza, 37
- modelo estándar o SM, 3
 - QCD, 3
 - QED, 3
- número de condición, 66
- NLO, 17
- observable físico
 - ángulo azimutal, 24
 - ángulo polar, 25
 - cuatrimomento, 26
 - energía transversa, 26
 - energía transversa faltante o
 - MET, 26
 - masa minimax, 64

- momento, 25
- momento transverso, 25
- momento transverso faltante, 26
- pseudorapidez, 25
- rapidez, 25
- p.d.f., 36
 - de Poisson, 38
 - binomial, 39
- partícula elemental, 3
- PS, 33
- pureza, 66
- Python, 59
- QFT, 3
- región de señal, 13
- ROOT, 59
- señal, 12
- sección eficaz, 11
 - barn, 12
 - sección eficaz diferencial, 12
- sesgo, 43
- simulaciones de Montecarlo, 31
- traza, 23
- v.a., 36
- vértice primario, 27
- vértice secundario, 8
- valor esperado, 37
- varianza, 39